DIL'S NEW GEOMETRY

FOR

SECONDARY SCHOOLS'

Ninth and Tenth Classes.

(Urdu Edition)

دِل

کا

نیا ہندسہ

ثانوی مدارس کی نویں، دسویں جماعت کے لیے

از خواجہ دِل محمّد ایم۔ اے

فیلو پنجاب یونیورسٹی،

مصنّف و مؤلّفِ کتبِ درسیّہ و ریاضیّہ و ادبیّہ، منظوم و منثور

خواجہ بُک ڈپو، اُردو بازار، لاہور

بار دھم ۱۹٦۵

خواجہ گلزار محمد کسٹوڈین خواجہ دل محمد ٹرسٹ فنڈ ۔
نے گلزار عالم پریس ۔ لاھور میں چھپوا کر شائع کیا

پیش لفظ

بحمدہٖ تعالیٰ سلطنتِ خداداد پاکستان کے قیام اور اُس کے فیوض و برکات سے ہمارا وطن عزیز ذہنی غلامی سے آزاد ہونے کی طرف عملی قدم اٹھا رہا ہے۔ چنانچہ ہمارے مدارس میں تعلیم و تدریس کا سلسلہ آئندہ انگریزی کے بجائے اپنی مُلکی اور مِلّی زبان اُردو میں ہونا قرار پایا ہے۔

راقم الحروف نے طالبانِ علم اور اساتذۂ کرام کی سہولت اور خدمت کو مدِّنظر رکھتے ہوئے اپنی کُتب ریاضی کو اُردو زبان میں پیش کرنے کا عزم کر لیا ہے۔ موجودہ کتاب اِس سلسلے کی ایک کڑی ہے۔

یہ کتاب خدا کے فضل و کرم سے اپنی مقبولیت اور ہردلعزیزی کی وجہ سے کُتب درسی کی صفِ اوّل میں جگہ پا چکی ہے۔ اس کی ترتیب اور اسلوب بیان کو پسند کیا گیا ہے۔ چنانچہ یہ کتاب انگریزی زبان میں ایک لاکھ سے زیادہ تعداد میں شائع ہو چکی ہے۔ محکمہ ہائے تعلیم پنجاب و بمبئی و مدراس و علی گڑھ وغیرہ میں اِسے بطور ٹیکسٹ بُک کے منظوری کا شرف حاصل تھا۔

اُردو ترجمے میں اس کی خصوصیات کو پہلے سے بھی زیادہ نمایاں کر دیا گیا ہے۔ صفحے کی تقطیع بڑھا دی گئی ہے اور مسائل کی توضیح و تشریح کو عام فہم زبان میں پیش کیا گیا ہے اس کتاب میں مشقی اور آزمائشی سوالات کا کافی ذخیرہ موجود ہے۔ پانسو سے زیادہ نتائج صریح و استخراجی کو حل کر کے دکھایا گیا ہے اور ۹۰۰ سے زیادہ واضح شکلیں ہیں کہ طلباء کو مسائل کے سمجھنے اور مشقوں کے حل کرنے میں سہولت ہو۔ وَمَا تَوْفِیْقِیْ اِلَّا بِاللّٰہ

خادمِ مِلّت
مُصنِّف و مُترجِّم

فہرستِ مضامین

اصطلاحاتِ علمِ ہندسہ

Alternendo	تبدیل نسبت
Altitude	ارتفاع ۔ بلندی ۔ اونچائی
Analysis	تحلیل
Angle	زاویہ ۔ گوشہ ۔ کونہ
Angle, acute	حادّہ زاویہ
Angle, arms of an	زاویے کے بازو
Angle, complementary	تکمیلی زاویہ
Angle, exterior or external	بیرونی یا خارجہ زاویہ
Angle, included	درمیانی زاویہ
Angle, interior or internal	اندرونی یا داخلہ زاویہ
Angle, obtuse	منفرجہ زاویہ
Angle, reflex	زاویۂ معکوس
Angle, right	زاویۂ قائمہ
Angle, straight	زاویۂ مستقیمہ
Angle, supplementary	تتمہ زاویہ
Angle, vertax of an	راسی زاویہ (کونے کا سرا)
Angles	زاویے ۔ کونے
Angles, adjacent	متصلہ زاویے
Angles, alternate	متبادلہ زاویے
Angles, consecutive	متواتر زاویے
Angles, corresponding	متناظرہ زاویے
Angles, vertically opposite	راسی متقابلہ زاویے
Angular distance	زاویائی فاصلہ
Antecedent	مقدّم
Approximation	تخمینہ
Area	رقبہ
Assumption	مفروضہ
Axioms	علوم متعارفہ (اصول مسلّمہ)
Axis, of symmetry	محورِ تناسب
Axis, radical	اساسی محور
Base (of a triangle)	قاعدہ (مثلث)
Bisection	تنصیف ۔ نصف کرنا ۔
Bisector	ناصف (خطِ تنصیف)
Centre	مرکز

Centre, circum	مرکز محیط
Centre. Ex.	بیرونی مرکز
Centre, in.	اندرونی مرکز
Centroid	مرکز ہندسی
Circle	دائرہ
Circle, alternative segments of a	دائرے کے متبادلہ قطعے
Circle, angles in a segment of a	ہم قطعہ زاویے
Circle, arc of a	دائرے کی قوس
Circle, chord of a	دائرے کا وتر
Circle, inscribed	اندرونی دائرہ
Circle, sector of a	قطاع دائرہ
Circle, segment of a	قطعہ دائرہ
Circle, semi	نصف دائرہ
Circles concentric	ہم مرکز دائرے
Circles, escribed	بیرونی دائرے
Circumference	محیط
Circumscribe	(کسی شکل کے) گرد بنانا
Componendo	ترکیب نسبت
Concurrent lines	ہم نقط خطوط
Consequent	مؤخر
Constant	مستقل
Construction	ساخت ۔ بناوٹ ۔ عمل
Converse	عکس
Convex rectilinear figures	محدب مستقیمۃ الاضلاع شکلیں
Corollary	نتیجۂ صریح
Corresponding sides	اضلاعِ متناظرہ
Cube	مکعب
Cyclic	دوری
Data	امورِ معلومہ (دی ہوئی شرائط)
Diagonal	وتر
Dimention	امتداد
Direction	سمت
Dividendo	تفصیل نسبت
Enunciation	دعویٰ
Extension of a theorem	مسئلے کی توسیع
Extremes	انتہائی اعداد

Foot of perpendicular	پاۓ عمود
Geometrical interpretation	ہندسی تاویل
Geometrical figure	ہندسی شکل
Geometry	علمِ ہندسہ
Graph	گراف - ترسیم
Height	ارتفاع یا بلندی
Hypothesis	مفروضہ
Infinite	غیر محدود
Inscribe	اندر بنانا
Invertendo	عکس نسبت
Kite shaped quadrilateral	پتنگ
Line	خط
Line (straight)	خطِ مستقیم
Line (parallel)	خطِ متوازی
Line (curved)	خطِ منحنی
Line (broken)	خطِ شکستہ
Linear	ہم خط (خطی)
Linear (dimensions)	خطی ابعاد (ابعاد جمع بعد کی = دوری
Locus	طریق - طریق النقاط
Means	اوسط
Median	وسطانیہ یا خط وسطی
Orthocentre	مرکز عمودی
Parallelogram	متوازی الاضلاع
Perpendicular	عمود
Plane figure	شکل مستوی
Polygon	کثیر الاضلاع
Postulate	اصول موضوعہ
Problem	مسئلہ عملی
Projection	ظل (سایہ)
Projection orthogonal	عمودی ظل
Proportional, fourth	چوتھا متناسب
Proportional, mean	وسط فی التناسب (وسط نسبتی)
Proportional parts	نسبتی حصے
Proportional, third	تیسرا متناسب
Proposition	شکل - مسئلہ
Quadrilateral	ذوار بعۃ الاضلاع چار ضلعی شکل یا چوکور

Q.E.D. Q.E.F.	ھو المطلوب
Radius	نصف قطر
Ratio	نسبت
Ratio, extreme and mean	طرفی و وسطی نسبت
Rectangle	مستطیل
Relatively prime to one another	متباین
Rhombus	شکل معیّن
Rotation	گردش ۔ حرکت
Similar figures	متشابہ شکلیں
Similarity	مشابہت
Solid	مجسّم
Solution	حل
Square	مربع
Superposition	تطبیق
Surface	سطح
Symmetrical	ہم شکل ۔ متشاکل
Tangent	مماس
Tangent, common	مماس مشترک
Theorem	مسئلہ اثباتی یا نظری
Touch, external	بیرونی مس
Touch, internal	اندرونی مس
Transversal	خطِ قاطع
Trapezium	شکل منحرف یا ذوزنقہ
Triangle	مثلث تکون
Triangle, acute-angled	مثلث حادّۃ الزاویہ
Triangle, equilateral	مثلث متساوی الاضلاع
Triangle, isosceles	مثلث متساوی الساقین
Triangle, obluse angled	مثلث منفرجۃ الزاویہ
Triangle, right-angled	مثلث قائمۃ الزاویہ یا قائم الزاویہ
Triangle, scalene	مثلث مختلف الاضلاع
Variable	متغیّر
Varification	پڑتال
Vertex	راس

عِلمِ ہِندسہ مُستوی

1 علمِ ہندسہ کو انگریزی میں جیومیٹری کہتے ہیں۔ یہ لفظ یُونانی زُبان سے ماخوذ ہے جیو کے معنی ہیں زمین اور میٹرن کے معنی ہیں پیمائش۔ ابتدا میں جیومیٹری کا لفظ زمین کی پیمائش کے لیے استعمال کیا جاتا تھا۔ بعد میں اس کا مطلب علمِ اشکال لیا جانے لگا۔ پس علمِ ہندسہ اُس علم کا نام ہے جس میں اشیاء کی شکلوں، مقداروں اور مقامات کے متعلق بحث کی جاتی ہے۔ ماہرینِ لغت کا خیال ہے کہ لفظ ہندسہ لفظ اندازہ کا معرّب ہے ؛

2 علمِ ہندسہ کی دو شاخیں ہیں :۔ ہندسہ مُستوی اور ہندسہ مجسّمی ؛

علمِ ہندسہ مُستوی۔ وُہ علم ہے جس میں صرف اُن نقاط، خطُوط اور اشکال کے خواص پر بحث کی جاتی ہے جو ایک ہی مُستوی (ہموار) سطح میں مرتسم ہوں (سطحِ مُستوی کی تعریف کے لیے دیکھو پارہ 12)
ہندسہ مُستوی کی بھی دو شاخیں ہیں۔ عملی اور نظری ؛

عملی ہندسہ۔ وُہ علم ہے جس میں ہندسی امُور کو نقاط، خطُوط اور اشکال بناکر عملی اور تجرباتی طریق پر ثابت کیا جاتا ہے۔ یعنی عملی ہندسہ میں مختلف ہندسی امُور کی تصدیق عملی تشکیل کے ذریعے سے کی جاتی ہے ؛

نظری ہندسہ۔ اُس علم کا نام ہے جس میں اشکال کی وضع قطع، اُن کی وُسعت اور محلِ وقوع کے بارے میں محض دلائل کی بنا پر بحث کی جاتی ہے۔ اِن دلائل کی بنیاد (1) مسلّمہ تعریفوں (2) اصُولِ متعارفہ (3) پہلے سے ثابت شُدہ ہندسی امُور پر ہوتی ہے۔ چونکہ اِس شاخ میں ہندسی مسائل کی صداقت کے ثبوت میں شکلِ عملی کی بہ نسبت دلائل پر زیادہ زور دیا جاتا ہے۔ اِس لیے اِسے اثباتی ہندسہ بھی کہتے ہیں ؛

تعریفات و تشریحات

3 مجسّم۔ فضائے بسیط کا ایک ایسا حصّہ ہے جو سب طرف سے محدود ہو۔

تشریح: میز، کتاب، دیوار یا دُوسری چیزیں جن کو ہم دیکھ یا چھُو سکتے ہیں، کچھ جگہ گھیرتی ہیں یہ سب مادّی مجسّم ہیں مگر علمِ ہندسہ کو اُن کی ساخت۔ اُن کے رنگ۔ اُن کی حرارت و برودت سے کوئی واسطہ نہیں۔ علمِ ہندسہ کا تعلّق صرف اُس جگہ سے ہے جو وُہ گھیرتی ہیں۔ اس علم میں صرف اُن کی شکل و صُورت پر بحث ہوگی۔ پس ہو سکتا ہے کہ لوہے کا گولہ۔ کارک کی گیند یا صابُون کا بُلبُلا ایک ہی مقدار میں جگہ گھیریں اور علمِ ہندسہ کی رُو سے برابر کے مجسّم سمجھے جائیں۔ اگرچہ ان کے وزن اور رنگ میں بہت فرق ہوگا۔ پس یاد رکھو کہ ہندسی مجسّم میں اشیا کے مادّے کے بارے میں کوئی خیال شامل نہیں۔ بحث صرف اُس جگہ سے ہے جو وُہ گھیرتی ہیں ؎

4 مجسّم کی تین امتداد ہوتی ہیں طُول، عرض اور عُمق یعنی لمبائی۔ چوڑائی اور گہرائی یا موٹائی ؎

5 ہر مجسّم سطحوں پر منتہی ہوتا ہے۔ سطح کی صرف دو امتداد ہوتی ہیں۔ طُول اور عرض۔ ہر سطح ایک یا ایک سے زیادہ خطوں پر منتہی ہوتی ہے۔ خط کی صرف ایک امتداد ہوتی ہے۔ طُول۔ ہر خط نقطوں پر منتہی ہوتا ہے۔ نقطے میں نہ طُول ہوتا ہے نہ عرض نہ عُمق وُہ صرف مقام کو ظاہر کرتا ہے ؎

6 خطوں کے ایک دُوسرے کو قطع کرنے سے نُقطے پیدا ہوتے ہیں۔ نُقطوں کے ظاہر کرنے کا صحیح طریقہ × × ہے نہ کہ . . . .

مندرجۂ ذیل باتوں پر غور کرو:-

1 قلم سے لگایا ہُوا نقطہ ہندسی نقطہ نہیں۔ کیونکہ خواہ وُہ کتنا ہی چھوٹا کیوں نہ ہو۔ اُس کا کچھ نہ کچھ طُول اور عرض ضرور ہوگا ؎

2 کاغذ کا ورق مجسّم ہے کیونکہ وُہ طُول اور عرض کے علاوہ موٹائی بھی رکھتا ہے۔ خواہ وُہ کتنی ہی کم کیوں نہ ہو ؎

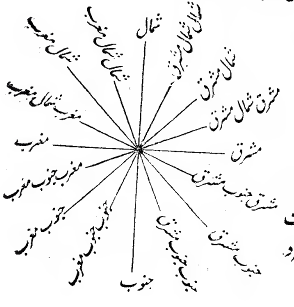
3 دھاگے کا ٹکڑا خط نہیں کیونکہ اس میں طُول۔ عرض اور موٹائی تینوں موجود ہیں ؎

4 آدمی کا سایہ سطح ہے ؎

5 گیند کا مرکز ایک نقطہ ہے ؎

6 کاغذ کو تہ کرو۔ اس طرح جو نشان کاغذ پر پڑ جاتا ہے وُہ خط کو ظاہر کرتا ہے کیونکہ اس میں چوڑائی اور موٹائی نہیں ؀

7 اگر ہم ایک نقطے کے مقام سے دُوسرے نقطے کے مقام کو اس طرح دیکھیں کہ وہ کس طرف واقع ہے تو سمت متعیّن ہو جائے گی۔



ایک نقطے کے مقام سے بے شمار سمتیں متعیّن ہو سکتی ہیں۔ سامنے دی ہوئی شکل میں قطب نما کے نشانات دکھائے گئے ہیں۔ جو متزادلہ سمتوں کو ظاہر کرتے ہیں ؀

8 **خطِ مستقیم**۔ وُہ خط ہے جو اپنی تمام لمبائی میں صرف ایک ہی سمت قائم رکھے۔ علمِ ہندسہ میں خط سے مراد بالعموم خطِ مستقیم لی جاتی ہے ؀

مندرجۂ ذیل امور قابلِ توجّہ ہیں:—

1 ایک خطِ مستقیم اپنے دونوں سروں کے درمیان ہموار پھیلا ہُوا ہوتا ہے ؀
2 یہ دو نقطوں کے درمیان کم سے کم فاصلہ کو ظاہر کرتا ہے ؀
3 دو دیے ہوئے نقطوں میں سے ایک اور صرف ایک ہی خطِ مستقیم کھینچا جا سکتا ہے
4 دو خطِ مستقیم اپنے درمیان جگہ نہیں گھیر سکتے ؀

ا ——— ب

نوٹ: جب ہم یہ کہتے ہیں کہ ا ب ایک خطِ مستقیم ہے تو ہمارا مطلب صرف یہ ہوتا ہے کہ سیاہ خط ا ب ایک خطِ مستقیم کو ظاہر کر رہا ہے۔ اصل میں یہ سیاہ خط ہندسی خط نہیں کیونکہ اس میں موٹائی موجود ہے خواہ وہ کتنی ہی کم کیوں نہ ہو۔ علمِ ہندسہ کی رُو سے صحیح خط وُہ حد ہے جو خط کے سیاہ رنگ کو کاغذ کے سفید رنگ سے الگ کرتی ہے۔ پس ایک ہندسی خط اس سیاہ لکیر ا ب کے اُوپر اور ایک اس کے نیچے واقع ہے۔ لیکن سہولت کی غرض سے عام طور پر خط ا ب ہی کو صحیح خط کا قائم مقام مان لیا جاتا ہے ؀

9 **خطوطِ متوازی**۔ وُہ خطوط ہیں جو ایک ہی سطح مستوی میں ہوں اور لگاتار دونوں طرف بڑھائے جانے سے آپس میں نہ ملیں ؀

10 **خطِ منحنی**۔ وُہ خط ہے جو نقطہ بہ نقطہ اپنی سمت بدلتا جائے اُس کا کوئی حصّہ مستقیم نہیں ہوتا ؀

11 خطِ شکستہ۔ وُہ خط ہے جو مُستقیم نہ ہو۔ لیکن اس کے تمام حصے مُستقیم ہوں ؛ 

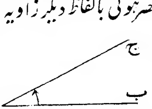
12 سطحِ مستوی۔ وُہ سطح ہے کہ اگر اُس پر دو نُقطے مقرّر کر کے اُن میں خطِ مُستقیم کھینچیں تو اُس خط کا کوئی جُزو سطح سے باہر واقع نہ ہو بلکہ تمام خط اُسی سطح میں رہے ایسی سطح کو ہموار سطح بھی کہتے ہیں یہ دیکھنے کے لیے کہ کوئی سطح مستوی ہے یا نہیں پیمانے کے سیدھے کنارے کو اُس سطح پر مختلف سمتوں میں رکھو۔ اگر ہر حالت میں [illegible] سطح پیمانے کے سیدھے کنارے سے ملی رہے تو وُہ سطح مُستوی ہے ورنہ نہیں ؛

13 ہندسی شکل۔ نقطوں، خطوں اور سطحوں کے مجمُوعے کا نام ہے ؛

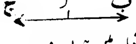
14 شکل مستوی۔ وُہ شکل ہے جس کے سب نقطے ایک ہی سطحِ مستوی پر واقع ہوں ؛

زاویہ

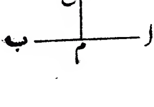
15 اگر دو خطِ مُستقیم آپس میں ملیں تو اُن کے باہمی میلان (جھکاؤ) کو زاویہ کہتے ہیں۔ اگر اب ایک خطِ مستقیم ہو اور ایک اور خط اج کاغذ کی سطح پر ا کے گرد اس طرح گردش کرے کہ اب کے مقام سے شروع ہو کر اج کے مقام پر پہنچ جائے تو زاویہ ب ا ج پیدا ہوگا۔ اس کی بڑائی۔ چھوٹائی اسی گردش کی مقدار پر منحصر ہوگی بالفاظ دیگر زاویہ یہ ظاہر کرتا ہے کہ کسی گھومنے والے خط کی سمت میں کس قدر تبدیلی ہوئی ہے۔ ا کو راسِ زاویہ یا نقطۂ زاویہ کہتے ہیں۔ اب اور اج زاویے کے بازو یا ساقین زاویہ (پائے زاویہ) کہلاتے ہیں۔ بازو خواہ لمبے ہوں خواہ چھوٹے ان کی اس بڑائی چھوٹائی سے زاویے کے چھوٹے یا بڑے ہونے پر کوئی اثر نہیں پڑتا۔ شکل میں دکھائے گئے زاویے کو دو طرح پڑھا جا سکتا ہے۔ ب ا ج یا ج ا ب اگر نقطہ ا پر ایک ہی زاویہ ہو تو اسے زاویہ ا یا ا ہی کہنا کافی ہے ؛



16 زاویۂ مُستقیمہ۔ وُہ زاویہ ہے جس کے دونوں بازو ایک ہی خطِ مستقیم میں ایک دُوسرے کی مخالف سمتوں میں ہوں ؛



17 زاویۂ قائمہ۔ زاویۂ مستقیمہ کا نصف ہوتا ہے۔ اس لیے اس کی تعریف یوں کی جا سکتی ہے :-



جب ایک خط مُستقیم دُوسرے خط مُستقیم پر اس طرح واقع ہو کہ دونوں طرف کے زاویے آپس میں مُساوی ہوں تو ان میں سے ہر ایک زاویے کو زاویہ قائمہ کہیں گے ؀

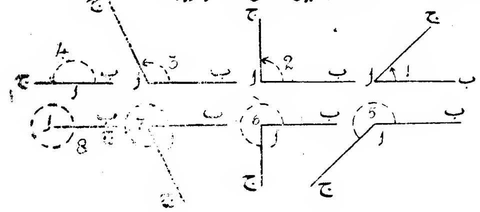
18 اگر دو خط ایک دُوسرے پر اس طرح واقع ہوں کہ وہ آپس میں زاویہ قائمہ بنائیں تو وہ ایک دُوسرے کے عمود کہلاتے ہیں ؀

مثلاً خط اب خط ل م ایک دوسرے کے عمود ہیں۔ دو خط ایک دوسرے کو علی القوائم قطع کرتے ہیں۔ جب وہ ایک دوسرے سے قائمہ زاویہ بنائیں ؀

19 اگر ایک خط ل م دُوسرے خط اب پر عمود ہو تو نقطہ م جہاں دونوں خط ملتے ہیں پایۂ عمود کہلاتا ہے ؀

20 اگر ایک نقطے سے ایک خط پر عمود گرایا جائے تو یہ عمود اس نقطے اور خط کے درمیانی فاصلے کو ظاہر کرے گا مثلاً ل کا فاصلہ اب سے ل م کے برابر ہے ؀

21 گھومنے والے خط ا ج کی مندرجۂ ذیل حالتیں غور طلب ہیں :-



1 زاویہ 1 زاویہ حادّہ کہلاتا ہے۔ یہ زاویہ قائمہ سے چھوٹا ہوتا ہے ؀
2 زاویہ 2 زاویہ قائمہ ہے ؀
3 زاویہ 3 زاویہ منفرجہ ہے یہ ایک زاویہ قائمہ سے بڑا ہوتا ہے اور زاویہ مستقیمہ سے چھوٹا ؀
4 زاویہ 4 زاویہ مستقیمہ ہے یہ زاویہ 2 کا دُگنا ہے اور اس لیے دو قائموں کے برابر ہے ؀
5 زاویہ 5 زاویہ منعکس کہلاتا ہے یہ زاویہ مستقیمہ سے بڑا ہوتا ہے ؀
6 زاویہ 6 تین قائمہ زاویوں کے برابر ہے ؀
7 زاویہ 7 تین قائموں سے بڑا ہے ؀
8 زاویہ 8 اس طرح حاصل ہوتا ہے کہ ا ج ا کے گرد گردش پوری کر کے اب کے

اُوپر آجائے۔ زاویہ 8 زاویہ 4 سے دُگنا ہے اَور اس لیے چار قائمہ زاویوں کے برابر ہے۔ پس اگر ل ج آدھا چکر کاٹے تو وُہ ایک زاویہ مستقیمہ بناتا ہے۔ اگر ل ج ایک چوتھائی چکر کاٹے تو زاویہ قائمہ بناتا ہے۔

22 ایک قائمہ زاویے کو 90 برابر حصّوں میں تقسیم کیا جاتا ہے۔ اور ایک حصّے کو ایک درجہ کہا جاتا ہے۔

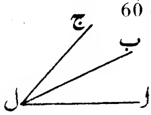
1 قائمہ زاویہ = 90 درجے یا 90°

2 〃 = 180 〃 〃 180°

4 〃 = 360 〃 〃 360°

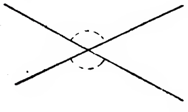
1 درجہ = 60 دقیقے 〃 60 منٹ یا $60'$

1 دقیقہ = 60 ثانیے 〃 60 سیکنڈ 〃 $60''$



23 اگر ایک نقطہ ل سے تین خطوط ل ا، ل ب اور ل ج ایک ہی سطح مستوی میں کھینچے جائیں تو زاویہ ا ل ب اور ب ل ج متصلہ زاویے کہلاتے ہیں۔

24 اگر دو خط ایک دُوسرے کو قطع کریں تو مقابل سمتوں میں پیدا ہونے والے زاویے **متقابلہ راسی زاویے** کہلاتے ہیں۔



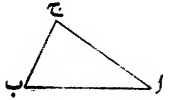
25 دو زاویے ایک دُوسرے کا تتمّہ (سپلیمنٹری) کہلاتے ہیں۔ اگر ان کا مجموعہ ایک زاویہ مستقیمہ یعنی دو قائمہ زاویوں کے برابر ہو مثلاً 120°، 60° ایک دُوسرے کے تتمّہ زاویے ہیں۔

$120^\circ + 60^\circ = 180^\circ =$ 2 قائمے۔

دو زاویے ایک دُوسرے کے تکمیلی زاویے (کامپلیمنٹری) کہلاتے ہیں۔ اگر ان کا مجموعہ ایک زاویہ قائمہ کے برابر ہو مثلاً 30°، 60° ایک دُوسرے کے تکمیلی زاویے ہیں کیونکہ $90^\circ = 60^\circ + 30^\circ$۔

26 **تنصیف** کے معنی ہیں دو برابر حصّوں میں تقسیم کرنا۔ تنصیف کرنے والے خط کو **ناصف** کہتے ہیں۔ اگر ایک دیے ہوئے زاویے اور اس کے تتمّہ زاویے کو دو خطوں سے تنصیف کیا جائے تو وُہ اس زاویے کے داخلی اور خارجی ناصف کہلاتے ہیں۔

مثلّث

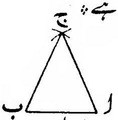


27 اگر کوئی شکل تین خطوطِ مُستقیم سے گھری ہوئی ہو تو وہ **مثلّث** کہلاتی ہے ۔

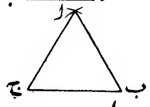
28 خطوط اب ، ب ج اور ج ا جو مثلّث کے حدود ہیں اس کے ضلعے کہلاتے ہیں۔ نقطے ا ، ب ، ج مثلّث کے راس کہلاتے ہیں ۔

29 ہر راس کے مقابل کا ضلع اس کا قاعِدہ کہلاتا ہے۔ پس اگر ہم ا کو راس سمجھیں تو ب ج قاعِدہ ہوگا۔ اگر ب کو راس سمجھیں تو ج ا قاعدہ ہوگا۔ اور اگر ج کو راس سمجھیں تو ا ب قاعِدہ ہوگا ۔

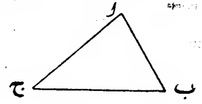
30 اگر ا ب کو قاعدہ مان لیا جائے تو ∠ا ج ب **راسی زاویہ** کہلاتا ہے ۔



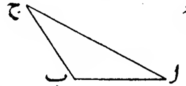
31 اگر کسی مثلّث کے دو ضلعے برابر ہوں تو اُسے مثلّث متساوی **السّاقین** یا مُساوی السّاقین کہتے ہیں ۔



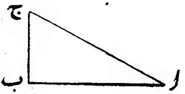
32 اگر کسی مثلّث کے تینوں ضلعے برابر ہوں تو اُسے مثلّث متساوی الاضلاع یا **مُساوی الاضلاع** کہتے ہیں ۔



33 اگر کسی مثلّث کے تینوں زاویے حادّہ ہوں تو اُسے مثلّث **حادّۃ الزّوایا** کہتے ہیں ۔

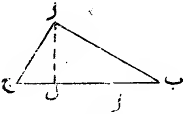


34 اگر ایک مثلّث کا ایک زاویہ مُنفرجہ ہو تو اُسے مثلّث **مُنفرجۃ الزّاویہ** کہتے ہیں ۔

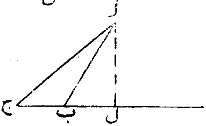


35 اگر ایک مثلّث کا ایک زاویہ قائمہ ہو تو اُسے مثلّث **قائمۃ الزّاویہ** یا قائم الزّاویہ کہتے ہیں ۔

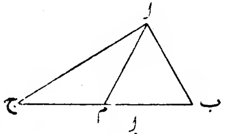
مثلث قائم الزاویہ میں زاویہ قائمہ کے مقابل کے ضلع کو وتر کہتے ہیں۔ مثلث ا ب ج میں بˆ زاویہ قائمہ ہے اور اج وتر ہے۔



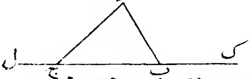
36 اگر مثلث کے کسی راس سے مقابل کے ضلع پر عمود گرایا جائے (اگرچہ بعض صورتوں میں اس ضلع کو بڑھانا پڑے) تو یہ عمود مثلث کا ارتفاع یا بلندی کہلاتا ہے۔ سامنے کی شکلوں میں ال مثلث ا ب ج کا ارتفاع ہے۔



37 مثلث کا وسطانیہ یا خط وسطی وہ خط ہے جو کسی راس کو مقابل کے ضلع کے نقطہ تنصیف سے ملائے۔ سامنے کی شکل میں ام وسطانیہ ہے۔



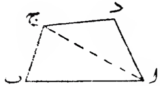
38 مثلث ا ب ج کے زاویے ابˆج، بجˆا اور جاˆب اندرونی داخلہ زاویے کہلاتے ہیں۔



اگر خط ج ب کو ک تک بڑھایا جائے تو زاویہ ابˆک بیرونی یا خارجہ زاویہ کہلائے گا اور اسی طرح اجˆل بھی خارجہ زاویہ ہے۔

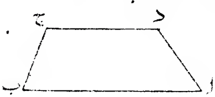
ذوارلبعۃ الاضلاع یا چوکور

39 اگر کوئی شکل مستوی چار خطوط مستقیم سے گھری ہوئی ہو تو اسے ذوارلبعۃ الاضلاع یا چار ضلعی شکل یا چوکور کہتے ہیں۔



40 چوکور کے مقابل کے راسوں کو ملانے والا خط وتر کہلاتا ہے۔ اج وتر ہے۔ اسی طرح اگر ب د کو ملایا جائے تو وہ بھی چوکور کا وتر ہوگا۔

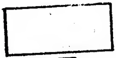
41 منحرف وہ چوکور ہے جس کے متوازی ہوں۔



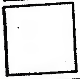
(ب) مُتساوی الساقین ذُوزنقہ۔ وُہ ذوزنقہ ہے۔ جس کے غیر مُتوازی اضلاع برابر ہوں ٭

42 **مُتوازی الاضلاع** وہ چوکور ہے جس کے مقابل کے اضلاع مُتوازی ہوں ٭

43 **مستطیل** وُہ مُتوازی الاضلاع ہے جس کا ایک زاویہ قائمہ ہو ٭



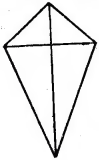
44 **مُربّع** وُہ مستطیل ہے جس کے دو اضلاع متّصلہ برابر ہوں ٭



45 **معیّن** وُہ متوازی الاضلاع ہے جس کے دو اضلاع متّصلہ برابر ہوں لیکن اس کے زاویے قائمہ نہ ہوں ٭

46 مُتوازی الاضلاع یا ذُوزنقہ کا ارتفاع اُس کے مُتوازی اضلاع کا درمیانی فاصلہ ہوتا ہے۔ یہ ارتفاع وُہ خط ہے جو ضلع کے کسی نقطے سے مقابل کے مُتوازی ضلع پر عموداً ڈالا جاتا ہے ٭

47 اگر ایک چوکور کے دو دو متّصلہ ضلعے آپس میں برابر ہوں تو اس شکل کو **پتنگ** کہتے ہیں ٭



کثیرُالاضلاع

48 اگر کوئی شکل مُستوی چار سے زیادہ اضلاع سے گھری ہو تو اُسے کثیرُالاضلاع کہتے ہیں ٭

نوٹ: پانچ ضلعوں والی شکل کو مخمّس اور چھ ضلعوں والی شکل کو مسدّس، سات ضلعوں والی شکل کو مسبّع، آٹھ ضلعوں والی شکل کو مثمّن، نو ضلعوں والی شکل کو متسّع، دس ضلعوں والی شکل کو معشّر کہتے ہیں ٭

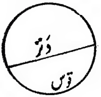
49 اگر کسی کثیرُالاضلاع کا کوئی زاویہ بھی معکوس نہ ہو تو اُسے **محدّب کثیرُالاضلاع** کہتے ہیں

50 **منتظم کثیرُالاضلاع** وُہ شکل ہے جس کے سب ضلعے اور سب زاویے برابر ہوں ٭

دائرہ

51 اگر ایک نقطہ سطح مستقیم میں اپنی جگہ پر قائم ہو اور دوسرا نقطہ اس طرح گھومے کہ اس کا فاصلہ پہلے نقطے سے یکساں رہے تو اس طرح جو شکل مستوی پیدا ہوتی ہے اُسے دائرہ کہتے ہیں۔ دائرے کا اندرونی نقطہ جو قائم رہتا اور جس سے گھومنے والا نقطہ پورے چکّر میں ہر جگہ یکساں فاصلے پر رہتا ہے

دائرے کا **مرکز** کہلاتا ہے۔ گھومنے والے نقطے سے جو خط پیدا ہوتا ہے اُسے **محیط** کہتے ہیں۔ یہ دائرے کو چاروں طرف سے گھیرے ہوئے ہوتا ہے۔ مرکز سے جتنے بھی خط محیط تک کھینچے جائیں وہ آپس میں برابر ہوں گے۔ محیط کا کوئی ٹکڑا **قوس** کہلاتا ہے۔



52 محیط پر دیئے ہوئے دو نقطوں کو ملانے والا خط **وتر** کہلاتا ہے۔ اگر کوئی وتر مرکز میں سے ہو کر گزرے تو اُس کو دائرے کا **قطر** کہتے ہیں۔ جو خط دائرے کے مرکز کو محیط کے کسی نقطے سے ملائے وُہ **نصف قطر** کہلاتا ہے۔

ہندسی مسئلہ

53 علم ہندسہ میں اشکال کے متعلق مختلف امور پر بحث کی جاتی ہے ہر بحث کا نام **مسئلہ** ہے
مسئلہ دو قسم کا ہوتا ہے

I اگر کسی مسئلہ میں اشکال کے خواص ثابت کرنے ہوں تو اس مسئلہ کو **مسئلہ اثباتی** یا نظری کہتے ہیں۔

2 اگر کسی مسئلہ میں امورِ معلومہ کے مطابق کوئی شکل مرتب کرنی ہو تو اس مسئلہ کو **مسئلہ عملی** کہتے ہیں۔

کسی مسئلہ کا **دعویٰ** وُہ بیان ہے جس سے پایا جائے کہ ہمیں کیا ثابت کرنا ہے یا کیا بنانا ہے

دعوائے عام۔ وُہ بیان ہے جس میں کسی مسئلہ کو عام الفاظ میں بیان کیا جائے۔

دعوائے خاص - وُہ بیان ہے جو عام الفاظ کے بجائے کسی خاص شکل کے حوالے سے دیا جائے جو اس مسئلہ کو ثابت کرنے کے لیے کھینچی جائے ۔

دعوائے خاص کے دو حصّے ہوتے ہیں :-

مسئلہ اثباتی میں **مفروض** - یعنی وُہ امور جو مان لیے گئے ہوں ۔

مطلوب - یعنی وُہ امور جو ثابت کیے جانے ہوں ۔

مسئلہ عملی میں **معلوم** - یعنی وُہ امور جو دیے ہُوئے ہوں ۔

مطلوب - یعنی وُہ امور جو بنائے جانے ہوں ۔

عکس - دو اثباتی مسئلے ایک دُوسرے کا عکس کہلاتے ہیں جب ایک کا مفرُوض دُوسرے کا مطلوب ہو اور دُوسرے کا مفرُوض پہلے کا مطلوب ۔

نتیجۂ صریح یا نتیجۂ تحتی - وُہ نتیجہ ہے جو کسی مسئلہ کے ثبوت سے بآسانی اخذ ہو سکے ۔

اصُولِ مُتعارِفہ

54 حسابی دلائل کی بُنیاد چند امورِ معلومہ پر ہوتی ہے - جن کو ہر آدمی صحیح تسلیم کرتا ہے یہ امُور جنھیں حکیم اُقلیدس "عام نتائج" کے نام سے موسوم کرتا ہے **اصُولِ مُتعارِفہ** کہلاتے ہیں - اِن کو بغیر کسی ثبوت کے مان لیا جاتا ہے وُہ اتنے سادہ اور صریح ہیں کہ ان کو ثابت کرنا ممکن نہیں ۔

عام اصُولِ مُتعارِفہ

1 (ا) جو چیزیں ایک ہی چیز کے برابر ہوں وُہ آپس میں برابر ہوں گی ۔

(ب) جو چیزیں برابر چیزوں کے برابر ہوں وُہ آپس میں برابر ہوں گی ۔

2 اگر برابر چیزوں میں برابر چیزیں جمع کی جائیں تو مجمُوعے برابر ہوں گے ۔

3 اگر برابر چیزوں میں سے برابر چیزیں کم کر دی جائیں تو کمی کے بعد بھی وُہ برابر رہیں گی ۔

4 اگر برابر چیزیں غیر مساوی چیزوں میں جمع کی جائیں تو مجمُوعے بھی غیر مساوی ہوں گے ۔

5 اگر غیر مساوی چیزوں میں سے برابر برابر چیزیں کم کی جائیں تو کمی کے بعد وُہ چیزیں غیر مساوی رہیں گی ۔

6 جو چیزیں ایک چیز کی دو چند ہوں وُہ برابر ہوتی ہیں جو چیزیں برابر چیزوں کی دو چند ہوں وُہ برابر ہوتی ہیں ؎

7 جو چیزیں ایک چیز کی نصف ہوں وُہ برابر ہوتی ہیں ۔ جو چیزیں برابر چیزوں کی نصف ہوں وُہ برابر ہوتی ہیں ؎

8 کُل اپنے جزو یا حصّے سے بڑا ہوتا ہے ؎

علمِ ہندسہ کے اصُولِ مُتعارِفہ

9 دو نقطے ایک خطِ مستقیم کو معیّن کر دیتے ہیں یا بالفاظِ دیگر :۔

1 دو نقطوں میں سے ایک اور صرف ایک خطِ مستقیم کھینچا جا سکتا ہے ؎

2 دو نقطے دو مختلف خطوطِ مستقیم کے ذریعے سے نہیں ملائے جا سکتے ؎

3 دو خطوطِ مستقیم سطح نہیں گھیر سکتے ؎

10 ایک خطِ مستقیم دو نقطوں کے کم سے کم درمیانی فاصلے کو ظاہر کرتا ہے ؎

11 تمام مستقیمہ زاویے برابر ہوتے ہیں (ظاہر ہے کہ تمام قائمہ زاویے بھی آپس میں برابر ہوں گے)

12 دو متقاطع خطوطِ مستقیم ایک ہی خطِ مستقیم کے متوازی نہیں ہو سکتے ؎

(پلے فیر صاحب کا اصول)

13 جو مقداریں ایک دُوسری پر پُورے طور سے منطبق ہو سکتی ہیں وُہ برابر ہوتی ہیں ؎

14 اگر ا، ب سے بڑا ہو اور ب، ج سے بڑا ہو یا اس کے برابر ہو تو ا، ج سے بڑا ہوگا ؎

اصُولِ موضُوعہ

55 اصولِ مُتعارفہ کے علاوہ چند اور مبادیات کو بھی تسلیم کرنا ضروری ہے ۔ جن کی مدد سے ہم آسان عمل کر کے ہندسی شکلیں بنا سکتے ہیں ۔ یہ مبادیات حسبِ ذیل ہیں :۔

یہ مان لینا چاہیے کہ :۔

I کسی ایک نقطے سے دُوسرے نقطے تک خطِ مستقیم کھینچا جا سکتا ہے ؎

ایک محدُود خطِ مستقیم کو کسی لمبائی تک اُسی سمت میں بڑھایا جا سکتا ہے ؎

(3) کسی نُقطے کو مرکز مان کر اَور کسی لمبائی کی دُوری لے کر ایک دائرہ کھینچا جا سکتا ہے
ظاہر ہے کہ پہلے دو اصولِ موضوعہ کے لیے ایک سیدھے پیمانے کا استعمال جائز ہوتا ہے اور تیسرے کے لیے ایک پرکار کا اَور یہی دو آلے اس کتاب کے مقاصد کے لیے ضروری اور کافی ہیں ؂

فرضی ساخت

56 جن اصولِ موضُوعہ کا ذکر اُوپر کیا گیا ہے اُن کے علاوہ ہندسی مسائل کے حل کرنے کے لیے ہمیں چند اَور عملوں کی بھی ضرورت پڑتی ہے، یہ عمل بھی اصولِ موضُوعہ کی طرح تسلیم کر لیے جاتے ہیں یہ حسبِ ذیل ہیں :-

یہ فرض کر لینا چاہیے کہ :-

1 ایک محدُود خط کی تنصیف کسی نقطے پر کی جا سکتی ہے ؂
2 ایک دیے ہُوئے زاویے کی ایک خط سے تنصیف کی جا سکتی ہے ؂
3 کسی دیے ہُوئے خط میں ایک نقطہ لے کر اس نقطے میں سے گزرتا ہُوا ایک اَور خط پہلے خط پر عمُوداً کھینچا جا سکتا ہے ؂
4 ایک دیے ہُوئے نقطے میں سے ایک خط کے متوازی ایک اَور خط کھینچا جا سکتا ہے ؂
5 ایک دیے ہُوئے خط کے کسی نقطے سے ایک اور خط پہلے خط سے ایک مقرّرہ زاویہ بناتا ہوُا کھینچا جا سکتا ہے ؂

اُقلیدس

57 علمِ ہندسہ کے متعلق بیشتر معلُومات یونانی ریاضی دانوں نے 500 سنہ قبل مسیح سے 300 سنہ قبل مسیح کے عرصے میں تحقیق کیں۔ حکیم اقلیدس جو سکندریہ کا ایک مشہور اُستاد تھا اس معاملے میں خاص طور پر قابلِ ذکر ہے۔ اس نے 300 سنہ قبل مسیح میں اس علم کو باقاعدہ مرتّب کیا۔ دو ہزار سال سے بھی زیادہ عرصے تک تحریرِ اقلیدس درسی کتاب کا کام دیتی رہی۔ آج کل کی مرّوجہ کُتب علمِ ہندسہ جس شکل میں پائی جاتی ہیں اگرچہ وُہ تحریرِ اُقلیدس سے مختلف ہیں۔ لیکن اُن کے بنیادی اُصُول زیادہ تر وہی ہیں جن کی تدوین حکیم اقلیدس نے کی تھی ؂

انتباہ

58 علم ہندسہ کے مؤلفین مسائلِ ہندسی کی ترتیب مختلف اختیار کرتے ہیں اس لیے کسی مسئلہ کا نمبر غیر ضروری چیز ہے اور اُس کو یاد رکھنا یا امتحان کے پرچوں میں اُس کا حوالہ دینا بیکار ہے اگر کسی مسئلہ کا حوالہ دینا ہو تو اس کا صحیح طریقہ یہ ہے کہ یا اس مسئلہ کا دعویٰ لکھ دیا جائے یا اپنے دلائل کو ایسی تفصیل سے بیان کیا جائے کہ زیرِ غور نکتہ بالکل صاف طور پر واضح ہو جائے۔

علامات و مخفّفات

59 مندرجۂ ذیل علامات و مخفّفات اس کتاب میں استعمال کیے گئے ہیں۔ ان کے استعمال سے مسائل کی تحریر میں کافی آسانی اور اختصار حاصل ہو جائے گا:-

$\therefore$	اس لیے	$\triangle$	مثلث
$\because$	چونکہ	$\triangle$ن	مثلثان
$=$	برابر ہے	$\perp$	عمود
$\neq$	نابرابر ہے	$\parallel$	متوازی
$\equiv$	منطبق ہے	$\parallel$ع	متوازی الاضلاع
$\sim$	فرق	$\bigcirc$	محیط
$<$	بڑا ہے	$\odot$	دائرہ
$>$	چھوٹا ہے	π	(پائی) $\frac{22}{7}$ یا 3.1416
$\wedge$	زاویہ		

حروف کے نشانات کو پڑھنے کا طریق

د_1 = د ایک، د_2 = د دو، د_3 = د تین وغیرہ

دَ = د زبری، دً = د دو زبری، دً_3 = د تین زبری وغیرہ

دٓ = د مدّہ، $\overline{\overline{\text{د}}}$ = د دو مدّہ، $\overline{\overline{\overline{\text{د}}}}$ = د تین مدّہ وغیرہ

۳۶۰

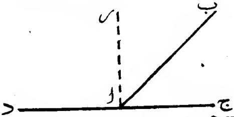
علمِ ہندسہ مستوی

پہلا حصہ

مسئلہ 1

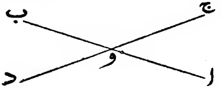
(اثباتی)

ایک خطِ مستقیم دُوسرے خطِ مستقیم پر واقع ہو کر جو دو متصلہ زاویے اُس کے ایک طرف بناتا ہے وُہ زاویے مل کر دو قائموں کے برابر ہوتے ہیں ؛

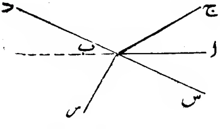


مفروضہ	فرض کرو خطِ مستقیم ا ب خطِ مستقیم ج د پر واقع ہو کر اُس کے ایک طرف دو زاویے ج ا ب ، ب ا د بناتا ہے۔
مطلوب	ج ا ب + ب ا د = 2 قائمے
عمل	نقطہ ا سے ا ر خط ج د پر عمود نکالو۔
ثبوت	∵ ج ا ب = ج ا ر − ب ا ر اور ب ا د = ب ا ر + ر ا د ∴ جمع کرنے سے ج ا ب + ب ا د = ج ا ر + ر ا د = 2 قائمے (فہو المطلوب)

نوٹ: اگر دونوں زاویے ج ا ب اور ب ا د برابر ہوں تو بموجب تعریف 17 وہ دونوں قائمے ہیں اور ان کا مجموعہ دو قائموں کے برابر ہے ؛



نتیجہ صریح 1 اگر دو خط ایک دُوسرے کو قطع کریں تو چاروں پیدا شدہ زاویوں کا مجموعہ چار قائموں کے برابر ہوگا ؛



2 اگر بہت سے خطوط ایک ہی نقطے پر آ کر ملیں تو اس طرح جتنے بھی زاویے بنیں گے سب کا مجموعہ چار قائموں کے برابر ہوگا ؛

مشق 1 (الف)

1 80°، 135°، 79°، 45°، 140°، 15° کے تتمہ زاویے بتاؤ ÷

2 25°، 37°، 58°، 62°، 30°، 83°، 48° کے تکمیلی زاویے بتاؤ ÷

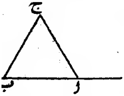
3 لا اور ما کا تعلق معلوم کرو۔ جب لا° اور ما° (1) تکمیلی زاویے ہوں (2) تتمہ ز

4 کون سا زاویہ (1) اپنے تکمیلی زاویے کے برابر ہے (2) اپنے تتمہ زاویے کے بر

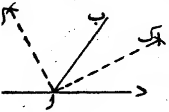
5 مسئلہ نمبر ا کی شکل میں ثابت کرو کہ :-

ب اˆد − ج اˆب = 2 ب اˆر

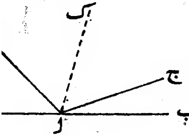
6 اگر دو خط ایک دوسرے کو قطع کریں اور اس طرح جو زاویے بنیں اُن میں سے قائمہ ہو تو ثابت کرو کہ باقی تمام زاویے بھی قائمہ ہیں ÷



7 اگر ایک مثلث کے دو داخلہ زاویے برابر ہوں تو اُن کے متصلہ خارجہ زاویے بھی برابر ہوں گے ÷

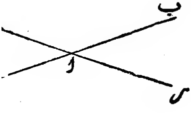


8 کسی زاویے کے داخلی و خارجی ناصف ایک دوسرے کے ساتھ زاویہ قائمہ بناتے ہیں ÷



9 ب اˆج اور ب اˆد کوئی دو زاویے ہیں اور اک زاویہ ج اˆد کی تنصیف کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ

ب اˆک = $\frac{1}{2}$ (ب اˆج + ب اˆد)



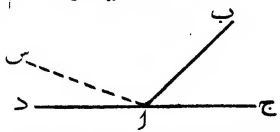
10 اگر نقطہ ا سے جو خطِ مستقیم ب ا ج پر واقع ہے دو خط اد اور ار مخالف اطراف میں کھینچے جائیں اور زاویہ ج اد زاویہ ب ار کے مساوی ہو تو ثابت کرو کہ

ب اˆد = ج اˆر

مسئلہ نمبر 1 کا عکس

(اثباتی)

اگر کسی خطِ مُستقیم کے ایک نقطے پر دو اور خطِ مستقیم مقابل سمتوں سے آکر متصلہ زاویے دو قائموں کے برابر بنائیں تو یہ دونوں خط ایک ہی خطِ مستقیم میں ہوں گے ۔

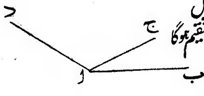


مفروض	فرض کرو خط اب کے نقطہ ا پر دو خط ج ا اور د ا مقابل سمتوں سے آکر دو زاویے ج اب اور ب اد بناتے ہیں جن کا مجموعہ دو قائموں کے برابر ہے ۔
مطلوب	ج ا اور اد ایک خط مستقیم بناتے ہیں ۔
عمل	اگر ایسا نہیں تو ج ا کو نقطہ س تک خطِ مُستقیم میں بڑھاؤ ۔
ثبوت	∵ بموجب عمل ج اس خطِ مُستقیم ہے اور ب ا اس سے نقطہ ا پر ملتا ہے ۔ ∴ ج اب + ب اس = دو قائمے مگر ج اب + ب اد = دو قائمے (مفروض) ∴ ج اب + ب اس = ج اب + ب اد پس ب اس = ب اد جو ناممکن ہے کیونکہ جُزو کُل کے برابر نہیں ہو سکتا ۔ پس اس اور اد باہم منطبق ہیں ۔ لہٰذا اج اور اد ایک ہی خطِ مستقیم میں ہیں ۔

(فھو المطلوب)

مشق 1 (ب)

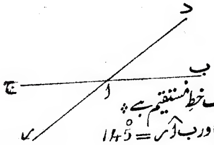
1 زاویہ پیما (پروٹریکٹر) کی مدد سے مندرجۂ ذیل زاویے بناؤ اور زاویہ پیما کی مدد کے بغیر ان کے تتمہ زاویے معلوم کرو:- (ا) 40° (2) 60° (3) 75° (4) 135°



2 اگر ب اج اور ج اد کی پیمائشیں مندرجۂ ذیل ہوں تو بتاؤ کس کس صورت میں ب ا د خطِ مستقیم ہوگا

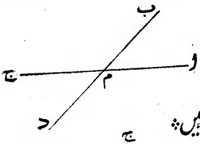
(ا) 54° ، 126° (ب) 58° ، 125°

(ج) 48° ، 132° (د) 46° ، 133°

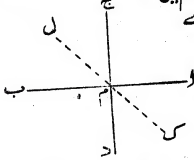


3 اگر نقطہ ا سے جو خطِ مستقیم ب اج پر واقع ہے دو خط اد اور ار مخالف سمتوں میں اِس طرح کھینچے جائیں کہ ب اد = ج ار = 40° تو ثابت کرو کہ د ار ایک خطِ مستقیم ہے۔

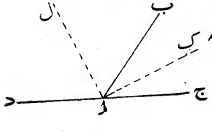
4 سوال نمبر 3 کی شکل میں اگر ب اد = 35° اور ب ار = 145° تو ثابت کرو کہ د ا ر خطِ مستقیم ہے۔



5 ایک نقطہ م میں سے چار خطِ مستقیم م ا، م ب، م ج، م د اس طرح کھینچے گئے ہیں کہ ب م ج = د م ا اور ا م ب = ج م د تو ثابت کرو کہ ا م ج اور ب م د خطوطِ مستقیم ہیں۔



6 ا ب، ج د دو خطوطِ مستقیم ایک دوسرے کو علی القوائم قطع کرتے ہیں۔ ج م ب اور د م ا کی تنصیف کرو۔ اور ثابت کرو کہ دونوں ناصف ایک ہی خطِ مستقیم میں ہیں۔

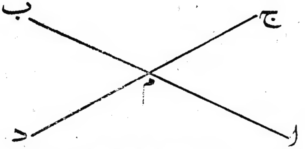


7 اگر دو متصلہ زاویوں کے ناصف ایک دوسرے کے ساتھ زاویہ قائمہ بنائیں تو زاویوں کے بیرونی بازو خطِ مستقیم میں ہوں گے۔

مسئلہ 2

(اثباتی)

اگر دو خطِ مُستقیم ایک دُوسرے کو قطع کریں تو راسی متقابلہ زاویے باہم برابر ہوتے ہیں ؎



مفروض	فرض کرو خط اب ، جد ایک دُوسرے کو نقطہ م پر قطع کرتے ہیں ؎
مطلوب	ا م̂ ج = ب م̂ د اور ج م ب = د م̂ ا
ثبوت	∵ خط م ج خط اب پر واقع ہے ∴ متصلہ زاویے ا م̂ ج + ج م̂ ب = دو قائمے ∵ خط م ب خط جد پر واقع ہے ∴ متصلہ زاویے ج م̂ ب + ب م̂ د = دو قائمے پس ا م̂ ج + ج م̂ ب = ج م̂ ب + ب م̂ د یعنی ا م̂ ج = ب م̂ د اِسی طرح ثابت کیا جا سکتا ہے کہ ج م̂ ب = د م̂ ا (فہوالمطلوب)

مشق 2

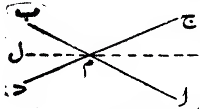
1 مسئلہ نمبر 2 کی شکل میں تمام زاویے معلوم کرو جب:-

(ا) ا م̂ ج = (1) 39° (2) 50° (3) 110°

(ب) ا م̂ ج + د م̂ ب = 70°

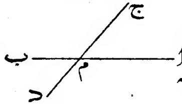
(ج) ا م̂ ج + ج م̂ ب + ب م̂ د = 216°

2 متقابلہ راسی زاویوں کے ناصف خطِ مستقیم میں ہوتے ہیں۔

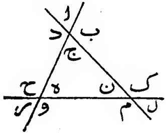


3 دو خطِ مستقیم اب، ج د نقطہ م پر تقاطع کرتے ہیں م ک زاویہ ا م̂ ج کا ناصف ہو تو ثابت کرو کہ ک م بڑھانے سے جو خط م ل پیدا ہوگا وہ ب م̂ د کا ناصف ہوگا۔

4 ج، د دو نقطے خطِ مستقیم اب کی مخالف سمتوں میں واقع ہیں۔ خط اب پر م ایک نقطہ ہے۔ اگر ا م̂ ج اور ب م̂ د مساوی ہوں تو ثابت کرو کہ ج م̂ د ایک خطِ مستقیم ہے۔



5 سامنے کی شکل میں مساوی زاویوں کے چھ جوڑے ہیں۔ ان کے نام لکھو اور ان کی برابری کی وجوہ بیان کرو۔

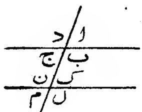


6 سامنے کی شکل میں ثابت کرو:-

(1) اگر ج̂ = ک̂ تو ا̂ = ک̂، د̂ = ل̂، ب̂ + ک̂ = 180°

(2) اگر ا̂ = ک̂ تو ج̂ = ک̂، د̂ = ل̂، ب̂ + ک̂ = 180°

(3) اگر ب̂ + ک̂ = 180° تو ج̂ = ک̂، ب̂ = ن̂، ا̂ = ک̂



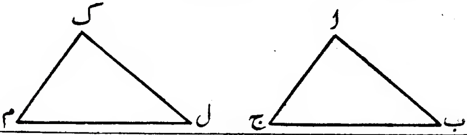
عملِ تطبیق

تعریف: اگر ایک ہندسی شکل کو دوسری ہندسی شکل کے اوپر اس طرح رکھا جائے کہ ایک کے حدود بعینہٖ اور بلا فرق دوسرے کے حدود پر واقع ہوں تو کہا جائے گا کہ دونوں شکلیں منطبق یا متطابق ہیں۔ اصولِ متعارفہ 3 کی رو سے یہ شکلیں ہر لحاظ سے برابر ہوں گی یعنی ان کے ضلعے، زاویے اور ان کے رقبے سب باہم برابر ہوں گے۔ دو شکلیں منطبق ثابت کرنے کے اس عمل کو عملِ تطبیق کہتے ہیں۔

مسئلہ 3

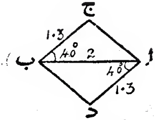
(اثباتی)

اگر کسی مثلّث کے دو ضلعے اور اُن کا درمیانی زاویہ بالتّرتیب کسی اور مثلّث کے دو ضلعوں اور اُن کے درمیانی زاویے کے برابر ہوں تو دونوں مثلّث منطبق ہوں گے ۔



مفروض	فرض کرو ا ب ج ، ک ل م دو مثلّث ہیں ۔ جن میں ا ب = ک ل ا ج = ک م اور $\hat{ا}$ = $\hat{ک}$
مطلوب	دونوں مثلّث منطبق ہوں گے ۔
ثبوت	مثلّث ا ب ج کو مثلّث ک ل م پر اس طرح رکھو کہ نُقطہ ا نُقطہ ک پر آئے اور خط ا ب خط ک ل پر۔ ∵ ا ب = ک ل اس لیے نُقطہ ب نُقطہ ل پر مُنطبق ہو گا اب ب $\hat{ا}$ ج = ل $\hat{ک}$ م اس لیے خط ا ج خط ک م پر مُنطبق ہو گا ∵ ا ج = ک م اس لیے نُقطہ ج نُقطہ م پر منطبق ہو گا اب نُقطہ ب نقطہ ل پر اور نُقطہ ج نُقطہ م پر مُنطبق ہیں اس لیے خط ب ج خط ل م پر مُنطبق ہو گا پس مثلّث ا ب ج کے حدُود بعینہٖ مثلّث ک ل م کے حدود پر واقع ہوتے ہیں ۔ لہٰذا دونوں منطبق ہیں ۔ (فہو المطلوب)

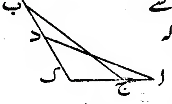
مشق 3



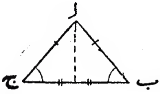
1 ایک خطِ مستقیم اب 2 سم لمبا کھینچو اور مخالف جہتوں میں زاویہ اب ج اور زاویہ ب ا د 40° کے برابر بناؤ۔ ب ج، ا د کو 1.3 سم کے برابر کاٹو ا کو ج سے اور ب کو د سے ملاؤ اور ثابت کرو کہ ا ج = ب د اور ب ا ج = ا ب د پیمائش سے اس نتیجہ کی جانچ کرو۔

2 اب ایک خطِ مستقیم 4 سم لمبا ہے اور م اس کا وسطی نقطہ ہے مخالف جہتوں میں زاویہ ب م ج، ا م د 50° کے برابر بناؤ اور م ج = م د = 3 سم کاٹو اور ثابت کرو کہ ا ج = ب د، ا د = ب ج۔

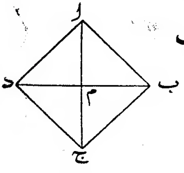
3 زاویہ پیمائی سے ا ک ب = 120° بناؤ۔ ک ا اور ک ب کو 1.7 سم کے برابر اور ک ج، ک د کو ایک سم کے برابر کاٹو۔ ا کو د سے اور ب کو ج سے ملاؤ۔ بذریعہ پیمائش ثابت کرو کہ ا = ب اور ا د = ب ج = 2.7 سم۔



4 کسی مثلث متساوی الساقین کے راسی زاویے کا ناصف اس کے قاعدے کی تنصیف کرتا ہے اور اس پر عمود واقع ہوتا ہے۔

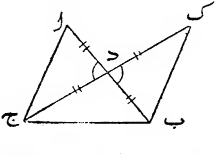


5 یہ جانتے ہوئے کہ مستطیل کے مقابل کے اضلاع برابر ہوتے ہیں۔ ثابت کرو کہ وتر بھی برابر ہوں گے۔



6 اگر کسی چوکور کے وتر ایک دوسرے کی تنصیف قائمہ زاویوں پر کریں تو ثابت کرو کہ وہ چوکور یا تو مربع ہے یا معین؟

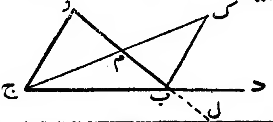
7 اب ج ایک مثلث ہے اور اب کا وسطی نقطہ د ہے ج د کو ملاکر ک تک بڑھاؤ۔ اس طرح کہ ج د = د ک ثابت کرو کہ ا ج = ک ب اور ا = د ب ک



مسئلہ 4

(اثباتی)

اگر کسی مثلث کا ایک ضلع بڑھایا جائے تو خارجہ زاویہ مقابل کے ہر ایک داخلہ زاویے سے بڑا ہو گا ؎



مفروض: فرض کرو اب ج ایک مثلث ہے جس کا ضلع ج ب نقطہ د تک بڑھایا گیا ہے ؎

مطلوب: زاویہ ا ب د بڑا ہے ج ا ب یا ا ج د سے

عمل: اب کا نقطۂ تنصیف م لو ج م کو ملا کر ک تک بڑھاؤ تا آنکہ م ک برابر ہو م ج کے۔ ک کو ب سے ملاؤ ؎

ثبوت:

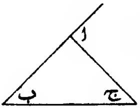
△ ا م ج اور ب م ک میں
ا م = م ب (بروئے عمل)
م ج = م ک
ا م ج = ب م ک (راسی مُتقابلہ زاویے)

پس △ ا م ج اور ب م ک (باہم منطبق ہیں)
لہٰذا م ب ک = ا
لیکن م ب ک زاویہ ا ب د کا ایک جزو ہے
∴ ا ب د بڑا ہے ا سے
اِسی طرح اگر ا ب کو ل تک بڑھایا جائے تو ثابت ہو سکتا ہے کہ
ج ب ل بڑا ہے زاویہ ج سے
لیکن ج ب ل = ا ب د (راسی مُتقابلہ زاویے)
لہٰذا ا ب د بڑا ہے ج سے

(فہو المطلوب)

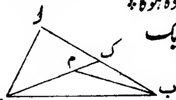
نتیجہ صریح (1) مثلث کے کوئی سے دو زاویے مل کر دو قائموں سے کم ہوتے ہیں ۔
(2) مثلث میں ایک سے زیادہ زاویہ قائمہ نہیں ہو سکتا ۔

مشق 4

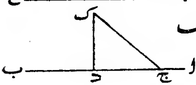


1 کیا سامنے والی شکل میں مندرجۂ ذیل صورتیں ممکن ہیں؟
(1) ا̂ = °60، ب̂ = °75 (2) ا̂ = °45، ج̂ = °50
(3) ا̂ = °56، ب̂ = °60، ج̂ = °55
(4) ا̂ = °65، ب̂ = °35، ج̂ = °30

2 ایک مثلث کے قاعدے کو دونوں طرف بڑھایا گیا ہے ثابت کرو کہ اس طرح جو خارجہ زاویے پیدا ہوں گے اُن کا مجموعہ دو قائموں سے زیادہ ہوگا ۔

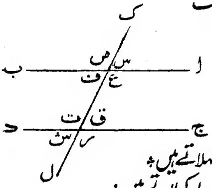


3 ا ب ج ایک مثلث ہے اور م اس کے اندر ایک نقطہ ہے اگر م ب اور م ج کو ملایا جائے تو ثابت کرو کہ ب م̂ ج > ا̂ سے ۔



4 ثابت کرو کہ کسی نقطے سے ایک خطِ مستقیم پر ایک اور صرف ایک عمود گرایا جا سکتا ہے ۔

متوازی خطوطِ مستقیم



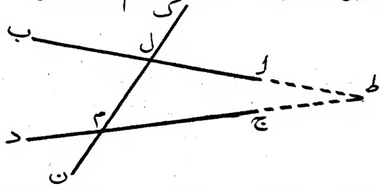
اگر اب اور ج د دو متوازی خطوطِ مستقیم کو ایک خطِ مستقیم ک ل قطع کرے تو آٹھ زاویے
س̂، ع̂، ف̂، ص̂، ق̂، ر̂
ش̂، ت̂ پیدا ہوں گے ۔
(1) ک ل کو خطِ قاطع کہتے ہیں ۔
(2) س̂، ص̂، ش̂، ر̂ بیرونی یا خارجہ زاویے کہلاتے ہیں ۔
(3) ع̂، ف̂، ت̂، ق̂ اندرونی یا داخلہ زاویے کہلاتے ہیں ۔
(4) ف̂، ق̂ متبادلہ زاویے ہیں ع̂، ت̂ بھی متبادلہ زاویے ہیں ۔
(5) خارجہ زاویے س̂ اور اس کا داخلی متقابلہ زاویہ ق̂ خطِ قاطع کی ایک ہی جہت میں واقع ہیں ان کو متناظرہ زاویے کہتے ہیں اسی طرح ص̂، ت̂ اور ف̂، ش̂ اور ع̂، ر̂ متناظرہ زاویوں کے زوج یا جوڑے ہیں ۔

مسئلہ 5

(اثباتی)

حصّۂ اوّل

اگر ایک خطِ قاطع دو خطوطِ مستقیم کو اس طرح قطع کرے کہ تبادلہ زاویے آپس میں برابر ہوں تو وُہ دونوں خطِ مستقیم متوازی ہوں گے ۔



مفروض	فرض کرو خطِ قاطع ک ل م ن خطوط ا ب ، ج د کو نقاط ل ، م پر قطع کرتا ہے اس طور پر کہ ب ل̂ م = ل م̂ ج
مطلوب	ا ب اور ج د متوازی ہیں ۔
عمل	اگر ا ب اور ج د متوازی نہیں تو بڑھائے جانے پر وُہ آپس میں ملیں گے خواہ ا ج کی طرف خواہ ب ، د کی طرف ۔ فرض کرو وُہ ا ، ج کی طرف نقطہ ط پر ملتے ہیں ۔
ثبوت	ط ل م △ ہے جس کا ب ل̂ م خارجہ زاویہ ہے اور ل م̂ ط داخلہ متقابلہ ∴ ب ل̂ م بڑا ہے ل م̂ ط سے مگر ب ل̂ م = ل م̂ ط کے (حسبِ مفروض) پس دونوں زاویے مساوی بھی ہیں اور غیر مساوی بھی جو ناممکن ہے ۔ ∴ ا ب اور ج د بڑھانے سے آپس میں نہیں مل سکتے ۔ پس ا ب اور ج د متوازی ہیں ۔ (فھو المطلوب)

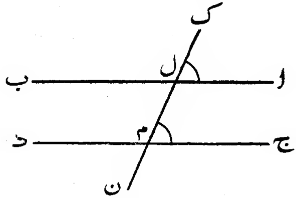
نوٹ : مندرجۂ بالا ثبوت تحویل بہ لغو پر مبنی ہے ۔ جس کا طریق استدلال یہ ہے کہ اگر اُس امر کو جس کی صداقت ہم ثابت کرنا چاہتے ہیں غلط فرض کر لیا جائے تو غیر ممکن نتائج پیدا ہوں گے ۔ اس کو ثبوت بہ خُلف بھی کہتے ہیں ۔

مسئلہ 5

(اثباتی)

حصۂ دوم

اگر ایک خطِ قاطع دو خطوطِ مُستقیم کو اِس طرح قطع کرے کہ دو مُتناظرہ زاویے آپس میں برابر ہوں تو وُہ دونوں خطِ مستقیم مُتوازی ہونگے ؛



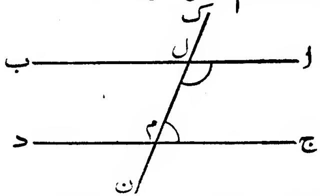
مفروض	فرض کرو خط ک ل م ن خطوط اب ، ج د کو نقاط ل ، م پر قطع کرتا ہے ۔ اس طور پر کہ ک لٓ ا = ل مٓ ج
مطلوب	اب اور ج د مُتوازی ہیں ؛
ثبوت	ک لٓ ا = ل مٓ ج (مفرُوض) لیکن ک لٓ ا = ب لٓ م (راسی مُتقابلہ زاویے) پس ب لٓ م = ل مٓ ج لیکن یہ مُتبادلہ زاویے ہیں اس لیے مطابق نتیجہ حصۂ اوّل اب اور ج د مُتوازی ہیں ؛ (فہو المطلوب)

مسئلہ 5

(اثباتی)

حصّۂ سوم

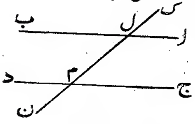
اگر ایک خطِ قاطع دو خطوطِ مستقیم کو اِس طرح قطع کرے کہ ایک ہی جانب کے دو داخلہ زاویوں کا مجموعہ دو قائموں کے برابر ہو ۔ تو وُہ دونوں خطِ مستقیم متوازی ہوں گے ۔



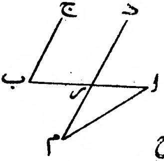
مفروض	فرض کرو خط ک ل م ن خطوط ا ب ، ج د کو نقاط ل ، م پر قطع کرتا ہے ۔ اس طور پر کہ ا ل م + ل م ج = دو قائمے ۔
مطلوب	ا ب اور ج د متوازی ہوں گے ۔
ثبوت	ا ل م + ب ل م = دو قائمے (متصلہ زاویے) لیکن ا ل م + ل م ج = دو قائمے (مفروض) ∴ ا ل م + ب ل م = ا ل م + ل م ج پس ب ل م = ل م ج لیکن یہ متبادلہ زاویے ہیں ۔ ∴ مطابق نتیجہ حصّۂ اوّل ا ب اور ج د متوازی ہیں ۔ (فہو المطلوب)

مشق 5

1 ایک خط $\overline{اب}$ لمبا لو اور اس کے دونوں طرف دو مُتساوی الاضلاع مثلّث اب ج اور اب د بناؤ اور ثابت کرو کہ اج ب د مُعیّن ہے۔



2 اگر ایک خط ک ل م ن دو خطوط $\overline{اب}$، $\overline{ج د}$ کو اس طرح کاٹے کہ ک $\widehat{ل}$ ا $= 142^\circ$، ن $\widehat{م}$ ج $= 38^\circ$ تو ثابت کرو کہ $\overline{اب}$ مُتوازی ہے $\overline{ج د}$ کے۔



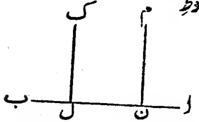
3 سامنے کی شکل میں اگر ا $\widehat{ب}$ ج $= 65^\circ$

ب $\widehat{ر}$ م + ب $\widehat{ا}$ م $= 100^\circ$

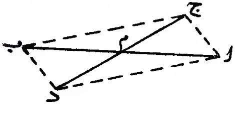
ب $\widehat{ر}$ م − ب $\widehat{ا}$ م $= 30^\circ$

تو ثابت کرو کہ $\overline{د م} \parallel \overline{ج ب}$

4 اگر ایک خطِ قاطع دو خطوطِ مستقیم کو اس طرح کاٹے کہ مُتبادلہ زاویے غیر مُساوی ہوں تو خطوطِ مُستقیم باہم مُتوازی نہ ہوں گے۔

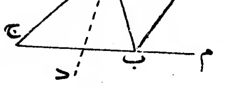


5 خطوط جو ایک ہی خطِ مستقیم پر عمود ہوں باہم مُتوازی ہوتے ہیں۔



6 اگر اب اور ج د نقطہ م پر ایک دُوسرے کی تنصیف کریں۔ تو ثابت کرو کہ ا د ب ج ایک مُتوازی الاضلاع ہے۔

7 اگر ایک مثلّث کا قاعدہ بڑھا دیا جائے تو ثابت کرو کہ خارجہ زاویے کا ناصف راسی زاویے کے ناصف کے مُتوازی نہیں ہوگا۔

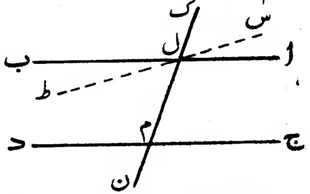


مسئلہ 6

(اثباتی)

حصۂ اوّل

اگر ایک خطِ قاطع دو متوازی خطوطِ مستقیم کو قطع کرے تو متبادلہ زاویے باہم برابر ہوں گے ۝



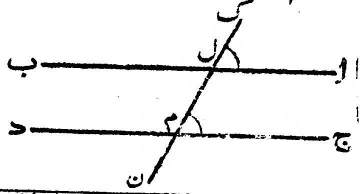
مفروض	فرض کرو خطِ قاطع ک ل م ن متوازی خطوط ا ب ، ج د کو نقاط ل ، م پر قطع کرتا ہے ۝
مطلوب	ب ل̂ م = ل م̂ ج
عمل	اگر ب ل̂ م اور ل م̂ ج برابر نہیں تو خط س ل ط اس طرح کھینچو کہ زاویہ ط ل̂ م = زاویہ ل م̂ ج
ثبوت	زاویہ ط ل̂ م = زاویہ ل م̂ ج (بموجب عمل) اس لیے س ل ط ‖ ہے ج د کے لیکن ا ل ب ‖ ہے ج د کے (مفروض) اس لیے دو متقاطع خطوط ا ل ب ، س ل ط ایک ہی خط ج د کے ‖ ہیں جو ناممکن ہے ۝ (پلے فیر صاحب کا اصول) ∴ زاویہ ب ل̂ م زاویہ ل م̂ ج سے غیر مساوی نہیں ۝ یعنی ب ل̂ م = ل م̂ ج (فہو المطلوب)

مسئلہ 6

(اثباتی)

حصۂ دوم

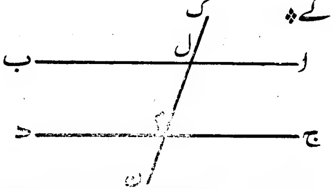
اگر ایک خطِ قاطع دو مُتوازی خطوطِ مُستقیم کو قطع کرے تو مُتناظرہ زاویے باہم برابر ہوں گے ٭



مفروض	فرض کرو خطِ مُستقیم ک ل م ن دو متوازی خطوطِ مُستقیم ا ب ، ج د کو نقاط ل ، م پر قطع کرتا ہے ٭
مطلوب	زاویہ ک ل ا = مُتناظرہ زاویہ ل م ج
ثبوت	∵ خط ا ب ‖ ہے خط ج د کے ٭ ∴ زاویہ ب ل م = مُتبادلہ زاویہ ل م ج (بموجب حصۂ اوّل) نیز زاویہ ب ل م = زاویہ ک ل ا (راسی مُتقابلہ زاویے) پس زاویہ ک ل ا = زاویہ ل م ج جو مُتناظرہ زاویے ہیں ٭ (فہوالمطلوب)

مسئلہ 6
(اثباتی)
حصۂ سوم

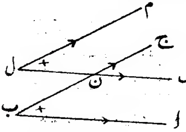
اگر ایک خطِ قاطع دو متوازی خطوطِ مُستقیم کو قطع کرے تو خطِ قاطع کے ایک ہی طرف کے داخلہ زاویے مل کر دو قائموں کے برابر ہوں گے ۔



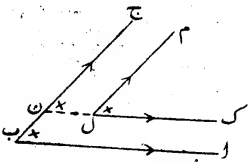
مفروض	فرض کرو خطِ مستقیم ک ل م ن دو متوازی خطوطِ مستقیم اب ، ج د کو نقاط ل ، م پر قطع کرتا ہے ۔
مطلوب	ا ل م + ل م ج = 2 قائمے
ثبوت	ا ل م + ب ل م = 2 قائمے (مُتّصلہ زاویے) لیکن ب ل م = ل م ج (مُتبادلہ زاویے) اِس لیے ا ل م + ل م ج = 2 قائمہ زاویے (فہو المطلوب)

تشریح: جس طرف کو کوئی خط کھینچا جائے وہی اُس خط کی سمت کہلاتی ہے۔ اگر دو متوازی خط دائیں طرف کھینچے جائیں یا دونوں بائیں طرف کھینچے جائیں تو کہا جائے گا کہ وُہ ایک ہی سمت میں کھینچے گئے ہیں۔ لیکن اگر ایک دائیں طرف کھینچا جائے اور دُوسرا بائیں طرف تو کہا جائے گا کہ وُہ مخالف سمتوں میں کھینچے گئے ہیں ۔

نتیجۂ صریح (۱) دو زاویے برابر ہوں گے اگر ان کے بازو متوازی ہوں اور ایک ہی سمت میں کھینچے جائیں ۔



مفروض۔ فرض کرو دو زاویے ا ب ج اور ک ل م ایسے ہیں کہ ان کے بازو ب ا || ل ک اور ب ج || ل م ایک ہی سمت میں کھینچے گئے ہیں ۔



مطلوب۔ ا ب ج = ک ل م

عمل۔ ک ل اور ب ج کا نقطۂ تقاطع ن قائم کرو ۔

ثبوت۔ ک ل اور ا ب متوازی ہیں اور ج ب اُن کو ن پر کاٹتا ہے ۔

(متناظرہ)

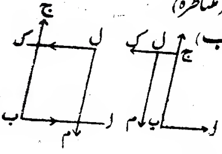
∴ ا ب ج = ک ن ج

اِسی طرح ب ج || ل م اور ک ن اُن کو کاٹتا ہے

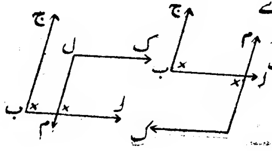
(متناظرہ)

∴ ک ل م = ک ن ج

∴ ا ب ج = ک ل م (فہو المطلوب)



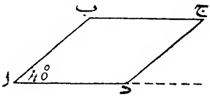
نتیجۂ صریح (2) دو زاویے برابر ہوں گے اگر ان کے بازو متوازی ہوں۔ لیکن دونوں کی سمت مخالف ہو (ثبوت دو)



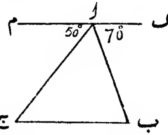
نتیجۂ صریح (3) دو زاویے ایک دُوسرے کے تتمہ ہوں گے۔ اگر ان کے بازو متوازی ہوں۔ مگر ایک جوڑا ایک سمت میں ہو اور دُوسرا مخالف سمت میں ۔ (ثبوت دو)

مشق 6

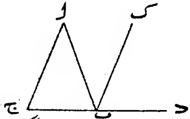
1 ایک متوازی الاضلاع ا ب ج د میں $\hat{ا} = 40^\circ$ ہے تو باقی سب زاویے معلوم کرو۔



2 ایک مثلث کے راس سے قاعدے کے متوازی ایک خط کھینچا گیا ہے جو مثلث کے دو ضلعوں کے ساتھ 50° اور 70° کے زاویے بناتا ہے۔ مثلث کے تمام زاویے معلوم کرو۔

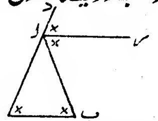


3 سامنے کی شکل میں $\overline{بک} \parallel \overline{جا}$
زاویہ دبک = 68° اور
کبا = 39°
مثلث کے تمام زاویے معلوم کرو۔



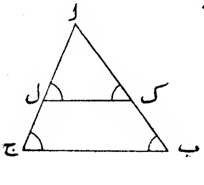
4 اگر متوازی الاضلاع کا ایک زاویہ قائمہ ہو تو سب زاویے قائمہ ہوں گے۔

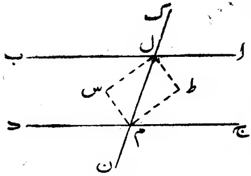
5 اگر کسی مثلث کے ایک بیرونی زاویے کا ناصف مقابل کے ضلع کے متوازی ہو تو ثابت کرو کہ :-
مثلث کے دو زاویے آپس میں برابر ہیں۔



6 اگر ایک خطِ قاطع دو متوازی خطوط کو کاٹے تو ثابت کرو کہ :-
(ا) متبادلہ زاویوں کے ناصف متوازی ہوں گے
(ب) متناظرہ زاویوں کے ناصف متوازی ہوں گے

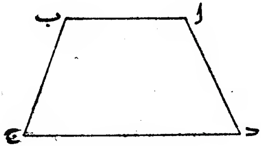
7 اگر کسی مثلث میں ایک خط قاعدے کے متوازی کھینچیں تو جو مثلث اس طرح کٹے گا وہ دیئے ہوئے مثلث سے متساوی الزوایا ہوگا۔





8 اگر ایک خطِ قاطع دو مُتوازی خطوط کو قطع کرے تو اندرونی زاویوں کے ناصف ایک مُستطیل بنائیں گے ۔

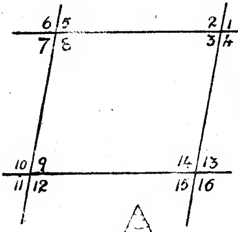
9 ا ب ج د ایک چوکور ہے ۔ جس کے ضلعے $\overline{\text{اب}}$ اور $\overline{\text{دج}}$ مُتوازی ہیں۔ ثابت کرو کہ :۔



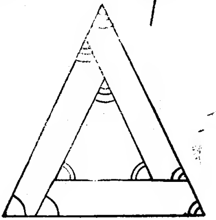
$\hat{\text{ا}} - \hat{\text{ب}} = \hat{\text{ج}} - \hat{\text{د}}$

$\hat{\text{ا}} - \hat{\text{ج}} = \hat{\text{ب}} - \hat{\text{د}}$

10 ایک مُتوازی الاضلاع کے ضلعے اس طرح بڑھائے جائیں ۔ جیسا سامنے کی شکل میں دکھایا گیا ہے ۔ تو ثابت کرو کہ :۔



$$\hat{13} = \hat{11} = \hat{7} = \hat{1}$$
$$\hat{16} = \hat{12} = \hat{8} = \hat{2}$$
$$\hat{15} = \hat{11} = \hat{13} = \hat{3}$$
$$\hat{14} = \hat{10} = \hat{8} = \hat{4}$$
$$180^\circ = \hat{14} + \hat{1}$$
$$180^\circ = \hat{9} + \hat{2}$$
$$180^\circ = \hat{10} + \hat{3}$$
$$180^\circ = \hat{7} + \hat{4}$$

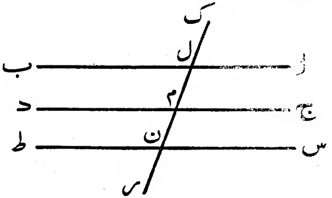


11 اگر ایک مثلّث کے اضلاع دُوسرے مثلّث کے اضلاع کے مُتوازی ہوں تو دونوں مثلّث مُساوی الزّوایا ہوں گے ۔

مسئلہ 7

(اثباتی)

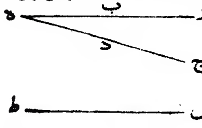
جو خطوطِ مستقیم کسی ایک ہی خطِ مستقیم کے متوازی ہوں وہ آپس میں بھی متوازی ہوں گے ۔



مفروض	فرض کرو خط ا ب اور ج د دونوں خط س ط کے متوازی ہیں ۔
مطلوب	ا ب متوازی ہے ج د کے ۔
عمل	کوئی خطِ قاطع ک ر کھینچو جو ا ب ، ج د ، س ط کو نقاط ل ، م ، ن پر قطع کرے ۔
ثبوت	∵ ا ب ‖ س ط ∴ ک لَ ا = ک نَ س (متناظرہ زاویے) ∵ ج د ‖ س ط ∴ ک مَ ج = ک نَ س (متناظرہ زاویے) ∴ ک لَ ا = ک مَ ج مگر یہ متناظرہ زاویے ہیں اس لیے ا ب متوازی ہے ج د کے ۔ (فہو المطلوب)

پلے فیر صاحب کے اُصول کی مدد سے ثبوت :-

اگر کئی خطِ مُستقیم ایک خطِ مُستقیم کے مُتوازی ہوں تو وُہ سب آپس میں مُتوازی ہوں گے ٭



مفروض اب اور ج د || س ط

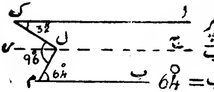
مطلوب اب || ج د

ثبوت اگر اب اور ج د مُتوازی نہیں تو فرض کرو کہ وُہ ایک دُوسرے کو کاٹتے ہیں ٭

اب ہم دیکھتے ہیں کہ دو مُتقاطع خطوطِ مُستقیم اب ، ج د ایک ہی خط س ط کے مُتوازی ہیں جو پلے فیر صاحب کے اصُول کی رُو سے ناممکن ہے

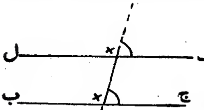
اس لیے اب || ج د (فہو المطلوب)

مشق 7

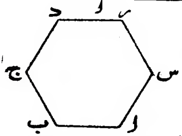


1 ک اور م زاویہ ک ل م = 96° کے دو بازوؤں پر دو نقاط ہیں اگر ک اور م سے دو خط ک ا اور م ب اس طرح کھینچے جائیں کہ ل ک ا = 32° اور ل م ب = 64° تو ثابت کرو کہ ک ا اور م ب باہم مُتوازی ہیں ٭

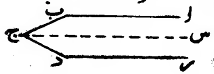
2 اگر تین خط ایک دُوسرے کے مُتوازی ہوں اور ایک اور خط ان میں سے ایک پر عمُود ہو تو وُہ باقی خطوط پر بھی عمُود ہو گا ٭



3 اگر خطوط اب اور اج دونوں خط ک ل کے مُتوازی ہوں تو اب اور اج دونوں ایک ہی خطِ مُستقیم بنائیں گے ٭



4 اب ج د ر س ایک منتظم مسدّس ہے ثابت کرو کہ اس کے مقابل کے اضلاع || ہیں یعنی اب || ر د ، ب ج || س ر وغیرہ (منتظم مسدّس کا ہر زاویہ = 120°)



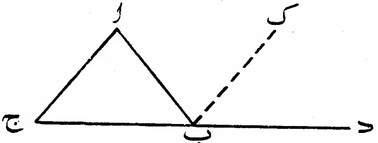
5 سامنے کی شکل میں اگر ب + ج + د = 4 قائمے تو ثابت کرو کہ اب || ر د ٭

مسئلہ 8

(اثباتی)

1 اگر کسی مثلث کا ایک ضلع بڑھایا جائے تو خارجہ زاویہ جو اس طرح پیدا ہوگا مقابل کے دو داخلہ زاویوں کے مجموعے کے برابر ہوگا۔

2 مثلث کے تینوں زاویوں کا مجموعہ دو قائموں کے برابر ہوتا ہے۔



مفروض	فرض کرو ا ب ج ایک △ ہے جس میں ج ب کو د تک بڑھایا گیا ہے
مطلوب	(1) ا ب̂ د = ا̂ + ج̂ (2) ا̂ + ب̂ + ج̂ = دو قائمے
عمل	فرض کرو نقطہ ب میں سے خط ب ک کھینچا گیا ہے جو ج ا کے متوازی ہے۔
ثبوت	(1) ب ک اور ج ا متوازی ہیں اور ا ب ان کو قطع کرتا ہے۔ ∴ ا ب̂ ک = ا̂ (متبادلہ زاویے) نیز ب ک اور ج ا متوازی ہیں اور ج ب د ان کو قطع کرتا ہے۔ ∴ ک ب̂ د = ج̂ (متناظرہ زاویے) جمع کرنے سے ا ب̂ ک + ک ب̂ د = ا̂ + ج̂ ∴ ا ب̂ د = ا̂ + ج̂ (فہو المطلوب) (2) اب ا̂ + ج̂ = ا ب̂ د ∴ ا̂ + ب̂ + ج̂ = ا ب̂ د + ا ب̂ ج مگر متصلہ زاویے ا ب̂ د + ا ب̂ ج = دو قائمے پس ا̂ + ب̂ + ج̂ = دو قائمے (فہو المطلوب)

نتیجۂ صریح (۱) اگر ایک مثلّث کے دو زاویے دُوسرے مثلّث کے دو زاویوں کے برابر ہوں تو ان کے تیسرے زاویے بھی آپس میں برابر ہوں گے ؂

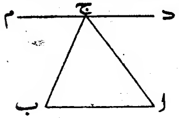
(2) مثلّث قائم الزّاویہ میں (۱) زاویہ قائمہ سب سے بڑا زاویہ ہوتا ہے ۔ اور (2) باقی زاویوں کا مجمُوعہ ایک قائمے کے برابر ہوتا ہے ؂

مشق 8

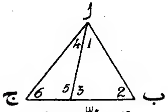
1 ایک مثلّث قائم الزّاویہ کا زاویہ خارجہ 130° ہے باقی زاویے معلُوم کرو ؂

2 کسی مثلّث کے تین زاویے 3 : 4 : 5 کی نسبت میں ہیں ان کی مقداریں معلُوم کرو

3 ایک مثلّث کے راس سے قاعدے کے متوازی خط کھینچ کر ثابت کرو کہ مثلّث کے تینوں زاویوں کا مجمُوعہ دو قائموں کے برابر ہے ؂



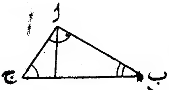
4 ایک مثلّث کے راس کو قاعدے کے کسی نقطے سے ملا کر ثابت کرو کہ مثلّث کے تینوں زاویوں کا مجمُوعہ دو قائموں کے برابر ہے ؂



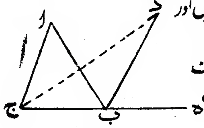
5 ہر مثلّث میں کم از کم دو زاویے حادّہ ہوتے ہیں ؂

6 ایک مثلّث کے دو زاویوں کا مجمُوعہ تیسرے زاویے کے برابر ہو تو وُہ مثلّث قائم الزّاویہ ہوگا ؂

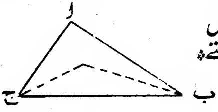
7 ایک قائم الزّاویہ مثلّث میں زاویہ قائمہ سے وتر پر عمُود گرایا گیا ہے جو مثلّث کو دو چھوٹے مثلّثوں میں تقسیم کرتا ہے ثابت کرو کہ دونوں چھوٹے مثلّث آپس میں اور نیز بڑے مثلّث کے ساتھ متساوی الزّاویا ہیں ؂



8 مثلّث ا ب ج میں ب د ، بؔ کا بیرونی ناصف ہے اور ج د ، جؔ کا اندرُونی ناصف، ثابت کرو ج د ب $= \frac{1}{2}$ اؔ



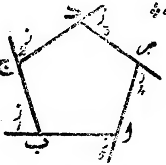
9 ثابت کرو کہ کسی مثلّث کے دو داخلہ زاویوں کے ناصف آپس میں زاویہ قائمہ نہیں بنا سکتے ؂

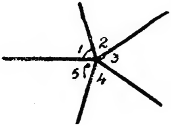


مسئلہ 9

(اثباتی)

اگر کسی محدّب کثیرُالاضلاع کے ضلعے ترتیب وار ایک ہی رُخ میں بڑھائے جائیں تو اس طرح بنے ہوئے تمام خارجہ زاویے مل کر چار قائموں کے برابر ہوں گے ؎





مفروض

فرض کرو اب ج د م ایک محدّب کثیرُالاضلاع ہے جس کے اضلاع ترتیب وار ایک ہی رُخ میں بڑھائے گئے ہیں جس سے $\hat{\text{ز}}_1$ ، $\hat{\text{ز}}_2$ ، $\hat{\text{ز}}_3$ ، $\hat{\text{ز}}_4$ ، $\hat{\text{ز}}_5$ خارجہ زاویے بنتے ہیں ؎

مطلوب

$\hat{\text{ز}}_1+\hat{\text{ز}}_2+\hat{\text{ز}}_3+\hat{\text{ز}}_4+\hat{\text{ز}}_5 =$ چار قائمے

عمل

کوئی نقطہ م لو اور اس میں سے کثیرُالاضلاع کے ضلعوں کے متوازی اور اُسی سمت میں خط کھینچو جدھر وہ ضلعے بڑھائے گئے ہیں۔ ان خطوط کے درمیانی زاویوں کو $\hat{1}$ ، $\hat{2}$ ، $\hat{3}$ ، $\hat{4}$ ، $\hat{5}$ سے ظاہر کرو ؎

ثبوت

$\hat{\text{ز}}_1$ اور $\hat{1}$ کے بازو متوازی ہیں اور ایک ہی سمت میں کھینچے گئے ہیں

$\therefore \hat{\text{ز}}_1 = \hat{1}$

اسی طرح $\hat{\text{ز}}_2 = \hat{2}$ ، $\hat{\text{ز}}_3 = \hat{3}$ ، $\hat{\text{ز}}_4 = \hat{4}$ ، $\hat{\text{ز}}_5 = \hat{5}$

$\therefore \hat{\text{ز}}_1+\hat{\text{ز}}_2+\hat{\text{ز}}_3+\hat{\text{ز}}_4+\hat{\text{ز}}_5 = \hat{1}+\hat{2}+\hat{3}+\hat{4}+\hat{5}$

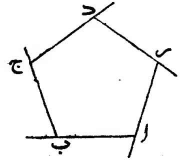
لیکن $\hat{1}+\hat{2}+\hat{3}+\hat{4}+\hat{5} = 4$ قائمے

؎ یہ زاویے ایک ہی نقطے پر ملنے والے خطوط سے پیدا ہوئے ہیں

$\therefore \hat{\text{ز}}_1+\hat{\text{ز}}_2+\hat{\text{ز}}_3+\hat{\text{ز}}_4+\hat{\text{ز}}_5 = 4$ قائمے

(فھو المطلوب)

نتیجۂ صریح (۱) لا ضلعوں والی مُحدّب کثیرُالاضلاع کے اندرُونی زاویوں کا مجمُوعہ ($2ل - 4$) قائموں کے برابر ہوتا ہے ٭



پہلا ثبُوت :—

کثیرُالاضلاع اب ج د ر کے اضلاع کو ترتیب وار بڑھاؤ ۔

ہر کونے پر داخلہ اور خارجہ زاویوں کا مجمُوعہ دو قائموں کے برابر ہے

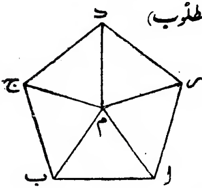
پس لا کونوں پر تمام داخلہ اور خارجہ زاویوں کا مجمُوعہ = 2 لا قائمے

لیکن تمام خارجہ زاویوں کا مجمُوعہ = 4 قائمے

∴ تمام اندرُونی زاویوں کا مجمُوعہ = 2 لا $- 4$ قائمے

(فہوالمطلُوب)

دُوسرا ثبُوت :—



عمل ۔ کثیرُالاضلاع میں کوئی سا نُقطہ م لو اور اسے تمام کونوں سے ملاؤ ۔ اِس طرح شکل لا مثلّثوں میں منقسم ہو گئی

ثبُوت ۔ ہر مثلّث کے زاویوں کا مجمُوعہ = دو قائمے

پس لا مثلّثوں کے زاویوں کا مجمُوعہ = 2 لا قائمے

لیکن اِن تمام مثلّثوں کے زاویوں کا مجمُوعہ کثیرُالاضلاع کے تمام اندرُونی زاویوں اور م پر کے زاویوں کے برابر ہے

م پر کے زاویوں کا مجمُوعہ = 4 قائمے

∴ کثیرُالاضلاع کے اندرُونی زاویوں کا مجمُوعہ = 2 لا $- 4$ قائمے

(فہوالمطلُوب)

مندرجۂ بالا نتیجۂ صریح نہایت ضروری نتیجہ ہے اور طالب علم کو خاص طور پر سمجھنا اور یاد رکھنا چاہیے ٭

اِس نتیجے کو دُوسرے الفاظ میں یوں بیان کیا جاتا ہے :—

کسی مُحدّب کثیرُالاضلاع کے اندرُونی زاویوں میں چار قائمے ملانے سے اضلاع کی تعداد سے دُگنے قائمے حاصل ہو جائیں گے ٭

نتیجہ صریح (2) کسی منتظم محدب کثیر الاضلاع کا زاویہ جس کے اضلاع کی تعداد لا ہو $= \frac{2\text{لا} - 4}{\text{لا}}$ قائمے۔

مشق 9

1 ثابت کرو کہ کسی مخمس کے اندرونی زاویوں کا مجموعہ 6 قائموں کے برابر ہوتا ہے۔

2 مندرجۂ ذیل شکلوں کے ایک زاویے میں کتنے درجے ہوں گے؟
(1) منتظم مخمس (2) منتظم مسدس (3) منتظم مسبع (4) منتظم مثمن
(5) منتظم معشر۔

3 کسی کثیر الاضلاع کا ہر زاویہ 150° ہے اضلاع کی تعداد معلوم کرو۔

4 ایک منتظم کثیر الاضلاع کا زاویہ 160° ہے اضلاع کی تعداد معلوم کرو۔

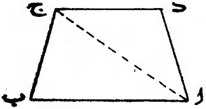
5 ان منتظم کثیر الاضلاع کے ضلعوں کی تعداد بتاؤ جن کے بیرونی زاویے مندرجۂ ذیل ہیں:-
(1) 90° (2) 60° (3) 40° (4) 36° (5) 24°
(6) 20° (7) 15° (8) 8° (9) 6° (10) $2\frac{1}{2}^\circ$

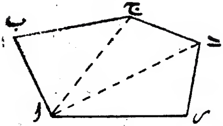
6 ان منتظم کثیر الاضلاع کے ضلعوں کی تعداد بتاؤ جن کے اندرونی زاویے مندرجۂ ذیل ہیں:-
(1) 108° (2) 135° (3) 144° (4) 150°
(5) $157\frac{1}{2}^\circ$ (6) 162° (7) 168° (8) $172\frac{1}{2}^\circ$
(9) 175° (10) 177°

7 کیا ایسی کثیر الاضلاع منتظم شکلیں ممکن الوجود ہیں جن کے اندرونی زاویے حسب ذیل ہوں؟ وجوہ بیان کرو:-
(1) 105° (2) 138° (3) 145° (4) $157\frac{1}{2}^\circ$

8 کسی کثیر الاضلاع کے ضلعوں کی تعداد جفت ہے اگر اس کے داخلہ زاویے باری باری 138° اور 150° ہوں تو اس کے ضلعوں کی تعداد بتاؤ۔

9 کسی چوکور کے دو مقابل کے کونوں کو ملا کر شکل کے چار زاویوں کا مجموعہ بتاؤ۔





کسی (1) مخمّس (2) مسدّس (3) مسبّع کے ایک کونے کو باقی کونوں سے ملاؤ بتاؤ کتنے مثلّث بنتے ہیں؟ اِن تمام مثلثوں کے زاویوں کا مجموعہ لے کر کثیرُالاضلاع کے اندرُونی زاویوں کا مجموعہ نکالو ۔

11 مندرجۂ بالا عمل اس کثیرُالاضلاع پر کرو جس کے اضلاع کی تعداد لا ہے - اور نتیجۂ صریح مسئلہ 9 ثابت کرو ۔

12 اضلاع کی تعداد بتاؤ جب :-

(1) ایک کثیرُالاضلاع کے خارجہ زاویوں کا مجموعہ اُس کے اندرُونی زاویوں کا $\frac{1}{5}$ ہے ۔

(2) ایک کثیرُالاضلاع کے داخلہ زاویوں کا مجموعہ خارجہ زاویوں سے چارگنا ہے ۔

(3) ایک کثیرُالاضلاع کے داخلہ زاویوں کا مجموعہ خارجہ زاویوں سے دُگنا ہے ۔

13 ایک مخمّس کے زاویوں کی مقدار لا ، لا + 10 ، 2لا − 12 ، لا + 30 اور 3لا − 40 درجے ہے لا کی قیمت بتاؤ ۔

14 ایک کثیرُالاضلاع کے زاویے 5 : 6 : 7 : 8 : 9 : 10 کی نسبت میں ہیں ہر زاویے کی قیمت بتاؤ ۔

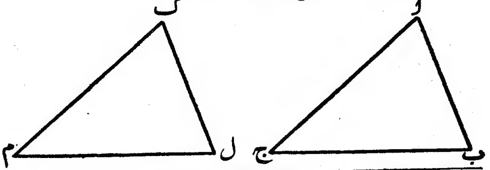
15 مسئلہ نمبر 9 کے نتیجۂ صریح نمبر 1 کی مدد سے ثابت کرو کہ △ کے زاویوں کا مجموعہ 180 درجے ہے ۔

16 اگر ایک کثیرُالاضلاع منتظم کا ہر زاویہ دو قائموں کا $\frac{7}{8}$ ہو تو اُس کے اضلاع کی تعداد بتاؤ ۔

مسئلہ 10

اثباتی

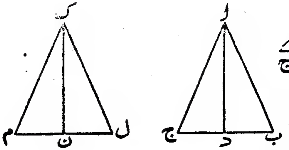
اگر کسی مثلّث کے دو زاویے اور ایک ضلع دُوسرے مثلث کے اپنی اپنی نظیر کے دو زاویوں اور ایک ضلع کے برابر ہوں تو دونوں مثلث منطبق ہوں گے ؛



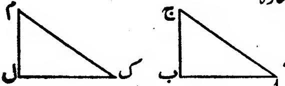
مفروض	فرض کرو △ اب ج اور △ ک ل م میں ا̂ = ک̂ اور ب̂ = ل̂ اور ضلع ب ج = ضلع ل م
مطلوب	△ اب ج اور △ ک ل م منطبق ہوں گے ۔
ثبوت	ہر مثلّث کے تینوں زاویوں کا مجموعہ دو قائموں کے برابر ہوتا ہے ؛ ∴ ا̂ + ب̂ + ج̂ = ک̂ + ل̂ + م̂ مگر ا̂ = ک̂ اور ب̂ = ل̂ پس ج̂ = م̂ اب △ اب ج کو △ ک ل م پر اس طرح رکھو کہ ۔ نقطہ ب نقطہ ل پر آئے اور خط ب ج خط ل م پر ∵ ب ج = ل م اس لیے نقطہ ج نقطہ م پر منطبق ہو گا اب ب̂ = ل̂ اس لیے خط ب ا خط ل ک پر 〃 〃 اور چونکہ ج̂ = م̂ اس لیے خط ج ا خط م ک 〃 〃 〃 اس لیے ا جو ب ا ، ج ا کا نقطۂ تقاطع ہے ک پر 〃 〃 جو ل ک اور م ک کا نقطۂ تقاطع ہے پس مثلّث اب ج کے حدود بعینہٖ △ ک ل م کے حدود پر واقع ہوتے ہیں لہٰذا دونوں مثلّث منطبق ہیں ؛ (فہو المطلوب)

مشق 10

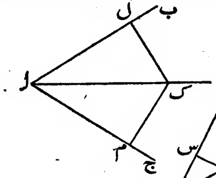
1 اب ج اور ک ل م دو مثلث ہر لحاظ سے برابر ہیں۔ اد قاعدہ ب ج پر اور کن قاعدہ ل م پر عمود ہیں۔ ثابت کرو اد = کن ۔



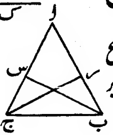
2 اگر دو قائم الزاویہ مثلثوں کے راسی حادہ زاویے اور وتر باہم برابر ہوں تو دونوں مثلث ہر لحاظ سے برابر ہوں گے۔



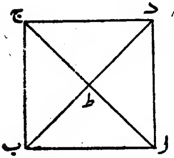
3 ک ا زاویہ ب ا ج کا ناصف ہے ک ل اور ک م نقطہ ک سے اب اور اج پر عمود ہیں ثابت کرو ک ل = ک م ۔



4 ثابت کرو کہ مثلث متساوی الاضلاع کے راسوں پر سے گرائے ہوئے عمود برابر ہوتے ہیں۔

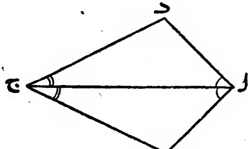


5 ثابت کرو کہ مربع کے وتر ایک دوسرے کی تنصیف کرتے ہیں۔



6 ثابت کرو کہ متوازی الاضلاع کے وتر ایک دوسرے کی تنصیف کرتے ہیں۔

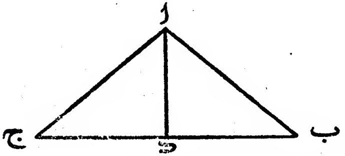
7 اگر کسی مختلف الاضلاع چوکور کا ایک وتر اُن دونوں زاویوں کی تنصیف کرے جن میں سے یہ گزرتا ہے تو ثابت کرو کہ وہ چوکور ایک پتنگ ہے۔



مسئلہ 11

(اثباتی)

اگر کسی مثلّث کے دو ضلعے برابر ہوں تو اُن کے مقابل کے زاویے بھی برابر ہوں گے ؎



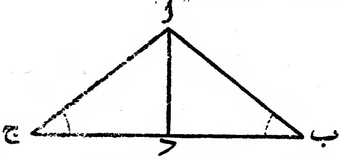
مفروض	فرض کرو اب ج ایک △ ہے جس میں اب = اج
مطلوب	زاویہ ج = زاویہ ب
عمل	فرض کرو اد زاویہ ا کا ناصف قاعدہ ب ج کو نقطہ د پر ملتا ہے ؎
ثبوت	△ اب د اور △ اج د میں اب = اج (مفروض) اد = اد ب اد = ج اد (بروئے عمل) ∴ △ اب د ≡ △ اج د پس زاویہ ب = زاویہ ج (فہو المطلوب)

نتیجۂ صریح (۱) کسی مثلّث متساوی الساقین کا راسی ناصف قاعدے کو عموداً کاٹتا ہے ؎
(2) اگر کوئی مثلّث متساوی الاضلاع ہے تو متساوی الزوایا بھی ہوگا ؎
(3) اگر مثلّث متساوی الساقین کے ضلعوں کو بڑھایا جائے تو بیرونی زاویے جو قاعدے کے ساتھ بنیں گے باہم برابر ہوں گے ؎

مسئلہ 11 کا عکس

(اثباتی)

اگر کسی مثلّث کے دو زاویے برابر ہوں تو اُن کے مقابل کے ضلعے بھی برابر ہوں گے ۔



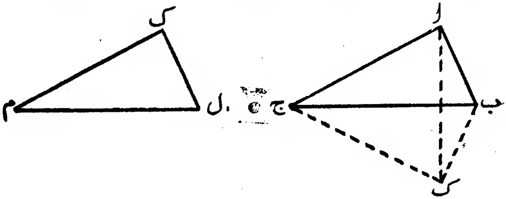
مفروض	فرض کرو ا ب ج ایک مثلث ہے جس میں ب̂ = ج̂ ۔
مطلوب	اج = اب ۔
عمل	فرض کرو اد زاویہ ا کا ناصف قاعدہ ب ج کو نقطہ د پر ملتا ہے ۔
ثبوت	△ ا ب د اور △ ا ج د میں ب̂ = ج̂ (مفروض) ب اد̂ = ج اد̂ (بروئے عمل) اد = اد ∴ △ ا ب د ≡ △ ا ج د ∴ اب = اج (فھو المطلوب)

نتیجۂ صریح: اگر ایک مثلّث مُتساوی الزّوایا ہو تو وُہ مُتساوی الاضلاع بھی ہوگا ۔

مسئلہ 12

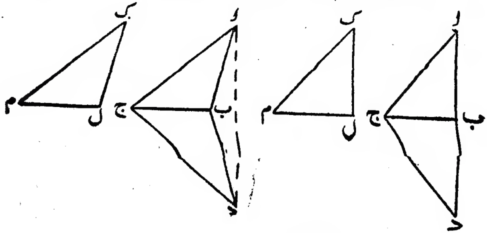
(اثباتی)

اگر ایک مثلّث کے تینوں ضلعے بالتّرتیب دُوسرے مثلّث کے تینوں ضلعوں کے برابر ہوں تو دونوں مثلّث منطبق ہوں گے ۔

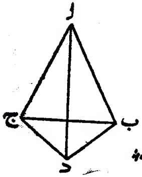


مفرُوض	فرض کرو △ ا ب ج اور △ ک ل م میں اب = ک ل ، ب ج = ل م اور ج ا = م ک
مطلوب	△ ا ب ج ≡ △ ک ل م
عمل	△ ک ل م کو اس طرح رکھو کہ سب سے بڑا ضلع ل م اپنے مساوی ضلعے ب ج پر منطبق ہو یعنی نقطہ ل نقطہ ب پر اور نقطہ م نقطہ ج پر واقع ہو اور نقطہ ک نقطہ ا کے مقابل دُوسری طرف آئے ا اور ک کو ملاؤ ۔
ثبوُت	△ ا ب ک میں اب = ب ک ∴ ب ا ک = ب ک ا .... (1) پھر △ ا ج ک میں اج = ج ک ∴ ج ا ک = ج ک ا .... (2) (1) اور (2) کے جمع کرنے سے ب ا ک + ج ا ک = ب ک ا + ج ک ا یا ب ا ج = ب ک ج = ل ک م اب △ ا ب ج اور △ ک ل م میں اب = ک ل ، اج = ک م ، ا = ک ∴ △ ا ب ج ≡ △ ک ل م (فہو المطلوب)

نوٹ: مسئلے کے عمل میں ہم نے سب سے بڑے ضلع ل م کو اس کے مساوی ضلع ب ج پر اس لیے منطبق کیا ہے کہ ثبوت کے لیے صرف ایک شکل کافی ہو ورنہ قائمۃ الزاویہ اور منفرجۃ الزاویہ مثلثوں کے لیے دو قسم کی شکلیں بنانی پڑیں گی۔ جن کا ثبوت ہم طالب علم پر چھوڑتے ہیں ۔



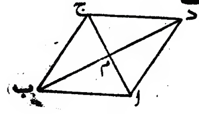
مشق 11، 12



1 اگر کسی چوکور کے مُتقابلہ اضلاع برابر ہوں تو وُہ متوازی الاضلاع ہوگا ۔

2 اب ج اور د ب ج دو مُتساوی السّاقین مثلث ہیں جو ب ج کی مخالف جہتوں پر واقع ہیں ۔ ثابت کرو کہ ا د زاویہ ا اور زاویہ د کا ناصِف ہے ۔

3 کسی چوکور اب ج د میں اب = ج د اور وتر ا ج = وتر ب د ثابت کرو د اب = ج د ا



4 مُعیّن کا وتر ان دونوں زاویوں کی تنصیف کرتا ہے جن میں سے یہ گزرتا ہے ۔

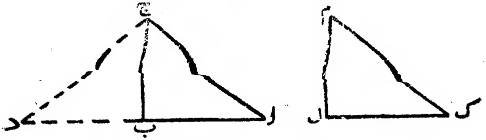
5 مُعیّن کے وتر ایک دوسرے کی عموداً تنصیف کرتے ہیں ۔

6 مُعیّن اب ج د کے اندر کوئی نقطہ ط لیا گیا ہے اگر ط ا = ط ج تو ثابت کرو کہ ط ب اور ط د ایک ہی خطِ مستقیم میں ہیں ۔

مسئلہ 13

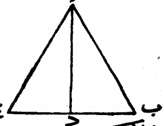
(اثباتی)

اگر دو قائم الزاویہ مثلثوں کے وتر برابر ہوں اور پہلے کا ایک ضلع دوسرے کے ایک ضلع کے برابر ہو تو دونوں مثلث منطبق ہوں گے ۔

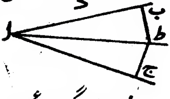


مفروض	فرض کرو △ اب ج، △ ک ل م میں ب̂ = ل̂ = زاویہ قائمہ وتر اج = وتر ک م اور ب ج = ل م
مطلوب	△ اب ج ≡ △ ک ل م
عمل	△ ک ل م کو △ اب ج کے ساتھ اس طرح رکھو کہ نقطہ م نقطہ ج پر اور ضلع م ل اپنے مساوی ضلع ج ب پر منطبق ہو اور نقطہ ک نقطہ د پر آئے جو ا کی مخالف سمت میں ہے اس طرح △ ک ل م کی نئی شکل △ د ب ج ہوگی ۔
ثبوت	∵ اب̂ج اور دب̂ج میں سے ہر ایک زاویہ قائمہ ہے ۔ ∴ اب̂ج + دب̂ج = دو قائمے ∴ اب د خطِ مستقیم ہے ۔ ∵ △ ادج میں ج ا = ج د ∴ ا̂ = د̂ = ک̂ اب △ اب ج اور △ ک ل م میں ∵ ا̂ = ک̂ اب̂ج = ک ل̂ م وتر اج = وتر ک م (مفروض) ∴ △ اب ج ≡ △ ک ل م (فہو المطلوب)

مشق 13



1 اگر کسی مساوی الساقین مثلث کے راس سے قاعدے پر عمود گرایا جائے تو یہ عمود قاعدے اور راسی زاویے دونوں کی تنصیف کرے گا ٭



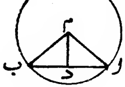
2 اگر کسی نقطہ ط سے ب ا ج کے بازوؤں پر گرائے ہوئے عمود برابر ہوں تو ثابت کرو ط ا زاویہ ا کا ناصف ہے ٭

3 اگر قائم الزاویہ مثلث میں وتر کے نقطۂ تنصیف سے اضلاع پر گرائے ہوئے عمود برابر ہوں تو مثلث متساوی الساقین ہوگا ٭

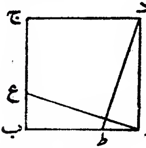
4 اگر کسی مثلث میں قاعدے کے زاویوں سے مقابل کے ضلعوں پر ڈالے گئے عمود برابر ہوں تو وہ مثلث متساوی الساقین ہوگا ٭

5 اگر مثلث کے راسی زاویوں سے مقابل کے اضلاع پر گرائے ہوئے عمود مساوی ہوں تو مثلث متساوی الاضلاع ہوگا ٭

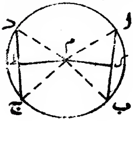
6 اگر کسی مثلث کے زاویۂ راس کا ناصف اُس کے قاعدے کی تنصیف کرے تو وہ مثلث متساوی الساقین ہوگا ٭



7 دائرے کے مرکز سے وتر پر گرایا ہوا عمود وتر کی تنصیف کرتا ہے ٭



8 ا ب ج د ایک مربع ہے ۔ اُس کے دو ضلعوں ا ب اور ج ب میں دو نقطے ط اور ع اس طرح لیے گئے ہیں کہ $\overline{\text{اط}} = \overline{\text{بع}}$ ثابت کرو کہ $\overline{\text{دط}}$ اور $\overline{\text{اع}}$ علی القوائم ہیں ٭

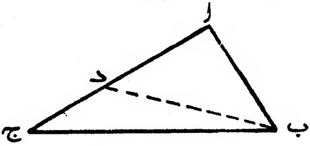


9 دائرے میں دو مساوی وتروں پر مرکز سے گرائے ہوئے عمود برابر ہوتے ہیں ٭

مسئلہ 14

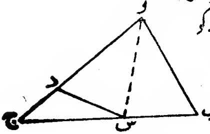
(اثباتی)

مثلث کے بڑے ضلع کے مقابل کا زاویہ چھوٹے ضلع کے مقابل کے زاویے سے بڑا ہوتا ہے ؛



مفروض	فرض کرو تکون ا ب ج میں اج بڑا ہے اب سے ؛
مطلوب	ابج بڑا ہے اجب سے ؛
عمل	اج میں سے اد کو اب کے برابر کاٹو اور ب د کو ملاؤ ؛
ثبوت	تکون ا ب د میں چونکہ اد = اب ∴ ادب = ابد مگر ادب بڑا ہے داخلہ متقابلہ زاویہ اجب سے ؛ ∴ ابد بھی بڑا ہے زاویہ اجب سے ؛ لیکن ابج بڑا ہے ابد سے ؛ ∴ ابج بہت ہی بڑا ہے اجب سے ؛ (فہوالمطلوب)

مسئلہ 14 کا دُوسرا ثبوت



عمل: اگر اج > اب سے تو اُس میں سے اد کو اب کے برابر کاٹو۔ فرض کرو اس، اؔ کا ناصف ہے س د کو ملاؤ ۔

ثبوت: تکون ا ب س ≡ تکون ا د س

کیونکہ اب = اد ، اس = اس اور د اؔ س = ب اؔ س

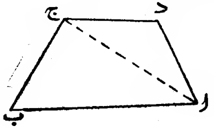
∴ ا دؔ س = بؔ

مگر ا دؔ س بڑا ہے داخلہ متقابلہ زاویہ ج سے

∴ بؔ بڑا ہے جؔ سے ۔

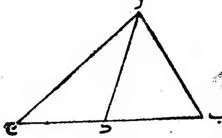
مشق 14 (ا)

1 ثابت کرو کہ △ کے سب سے بڑے ضلعے کے سروں پر جو دو زاویے ہوتے ہیں وہ حادّہ ہوتے ہیں۔



2 ایک چوکور ا ب ج د میں اب سب سے بڑا ضلع ہے اور ج د سب سے چھوٹا۔ ثابت کرو۔ جؔ بڑا ہے اؔ سے۔

3 مثلث متساوی الساقین میں اگر راسی زاویہ 60° سے بڑا ہو۔ تو قاعدہ دُوسرے ضلعوں سے بڑا ہوگا۔



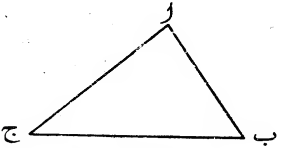
4 ثابت کرو اگر مثلث کے کسی زاویے سے کھینچا ہوا وسطانیہ مقابل کے ضلعے کے نصف سے بڑا ہو تو وُہ زاویہ حادّہ ہوگا۔

5 مثلث ا ب ج میں وسطانیہ اد زاویہ ا کو دو حصوں ب اؔ د اور ج اؔ د میں تقسیم کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ اگر اب چھوٹا ہے اج سے تو ب اؔ د > ج اؔ د سے ورنہ برعکس۔

مسئلہ 14 کا عکس

(اثباتی)

مثلّث کے بڑے زاویے کے مقابل کا ضلع چھوٹے زاویے کے مقابل کے ضلع سے بڑا ہوتا ہے ؛



مفرُوض	فرض کرو اب ج ایک تکون ہے جس کا زاویہ ب بڑا ہے زاویہ ج سے
مطلوب	ضلع اج بڑا ہے اب سے ؛
ثبوت	صورتِ مسئلہ تین حال سے خالی نہیں :-

اوّل یا اج برابر ہے اب کے

دوم یا اج چھوٹا ہے اب سے

سوم یا اج بڑا ہے اب سے

(1) اگر اج = اب

تو ب̂ = ج̂

یہ مفرُوض کے خلاف ہے لہٰذا ناممکن ہے ؛

(2) اگر اج چھوٹا ہے اب سے

تو ب̂ 〃 〃 ج̂

یہ بھی مفرُوض کے خلاف ہے لہٰذا ناممکن ہے ؛

پس صِرف تیسری صُورت ہی ممکن ہے یعنی اج بڑا ہے اب سے ؛

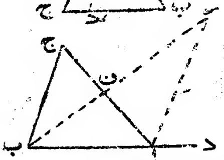
(فھوَ المطلُوب)

مشق 14 (ب)

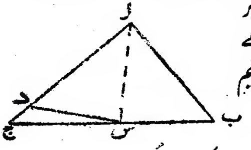
1 ثابت کرو کہ کسی قائم الزاویہ مثلث میں وتر سب سے بڑا ضلع ہوتا ہے۔

2 ثابت کرو کہ △ کے کوئی سے دو ضلعوں کا فرق تیسرے ضلع سے کم ہوتا ہے۔

3 ثابت کرو کہ متساوی الساقین مثلث کا کوئی سا مساوی ضلع اس خط سے بڑا ہوتا ہے جو راس کو قاعدے کے کسی نقطے سے ملائے۔

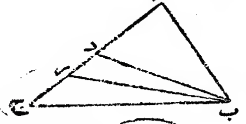


4 مثلث ا ب ج کا ضلع ب ا نقطہ د تک بڑھایا گیا ہے دو خطوط ا س اور ب س زاویہ ج ا د اور ج ب ا کی تنصیف کرتے ہوئے نقطہ س پر ملتے ہیں۔ اگر ب س خط ا ج کو نقطہ ف پر کاٹے تو ثابت کرو کہ ف س بڑا ہے ف ا سے۔



5 ایک مثلث کا قاعدہ جس کے اضلاع برابر نہیں ہیں ایک خط مستقیم سے جو مقابل کے زاویے کی تنصیف کرتا ہے دو حصوں میں تقسیم ہو جاتا ہے۔ ثابت کرو بڑا حصہ بڑے ضلعے کے متصل ہے۔

6 قائم الزاویہ مثلث میں وہ خط جو زاویۂ قائمہ کو وتر کے کسی بھی نقطے سے ملاتا ہے (سوائے نقطۂ وسطی کے) وتر کے ایک حصے سے کم ہوتا ہے اور دوسرے سے زیادہ۔



7 مسئلہ نمبر ۱/۴ کے عکس کو ذیل کے عمل سے ثابت کرو

ب سے ایسا خط ب د کھینچو کہ

ا ب̂ د = ج̂

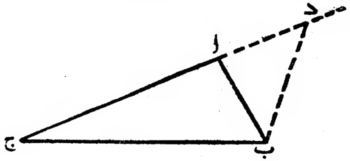
ب س زاویہ د ب̂ ج کا ناصف کھینچو جو ا ج کو نقطہ س پر ملے۔

8 کسی نقطے سے کسی خط تک تین مساوی خط کھینچنا ناممکن ہے۔

مسئلہ 15

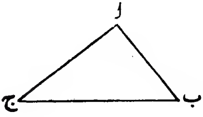
(اثباتی)

مثلث کے کوئی سے دو ضلعے مل کر تیسرے ضلع سے بڑے ہوتے ہیں ۔

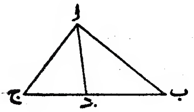


مفروض	فرض کرو اب ج کوئی مثلث ہے ۔
مطلوب	اب + اج > ب ج سے ۔
عمل	ج ا کو بڑھا کر اس پر اد = اب کاٹو۔ ب د کو ملاؤ ۔
ثبوت	△ ب اد میں اب = اد (بموجب عمل) ∴ اب̂د = د̂ لیکن ج ب̂ د بڑا ہے اب̂ د سے (کیونکہ کل بڑا ہوتا ہے جزو سے) ∴ ج ب̂ د بڑا ہے د̂ سے ۔ اب △ ب ج د میں زاویہ ج ب̂ د بڑا ہے د̂ سے ∴ مقابل کا ضلع ج د بڑا ہے ب ج سے ۔ مگر ج د = اد + اج = اب + اج ∴ اب + اج بڑے ہیں ب ج سے ۔ (فھو المطلوب)

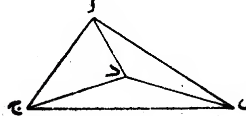
نوٹ: یہ حقیقت ہے کہ دو نقطوں ب، ج کے درمیان ب ج خطِ مستقیم ہے۔ اور ب ا ج خطِ شکستہ ہے مگر خطِ مستقیم دو نقطوں کے درمیان کم سے کم فاصلہ ہوتا ہے۔
لہٰذا ب ج چھوٹا ہے ب ا ج سے۔ اگر ہم ب سے ج کو جانا چاہیں تو وقت کی بچت صرف اس صورت میں ہو گی کہ ہم خطِ مستقیم ب ج پر سے جائیں نہ کہ پہلے ب سے ا کو اور پھر ا سے ج کو۔



مشق 15

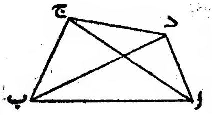


1 ا د زاویہ ب ا̂ ج کا ناصف ہے جو ب ج کو نقطہ د پر ملتا ہے۔ ثابت کرو ا ب > ب د سے ا ج > ج د سے اور اس طرح ثابت کرو کہ ا ب + ا ج بڑا ہے ب ج سے۔



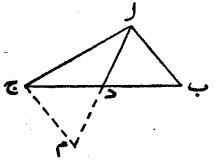
2 کسی نقطے سے مثلث کے تینوں راسوں کے فاصلوں کا مجموعہ مثلث کے نصف احاطے سے بڑا ہوتا ہے۔

3 کسی نقطے سے ایک چوکور کے چاروں راسوں کے فاصلوں کا مجموعہ چوکور کے نصف احاطے سے بڑا ہوتا ہے۔



4 ثابت کرو کہ چوکور کا احاطہ اس کے دو وتروں کے مجموعے سے بڑا ہے۔

5 چوکور کے کوئی سے تین ضلعوں کا مجموعہ چوتھے ضلعے سے بڑا ہوتا ہے۔

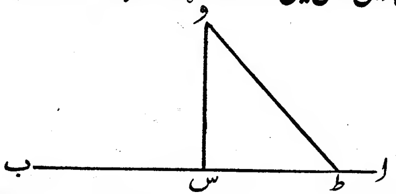


6 مثلث ا ب ج میں اگر ا د وسطانیہ ہو اور ا ج > ا ب سے تو ثابت کرو کہ ا د̂ ج بڑا ہے ا د̂ ب سے۔

مسئلہ 16

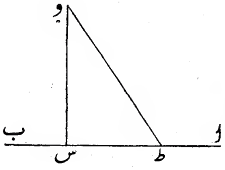
(اثباتی)

اگر کسی دیے ہوئے نقطے سے کسی دیے ہوئے خطِ مستقیم تک کئی خط کھینچے جائیں تو اُن خطوں میں سے عمود سب سے چھوٹا خط ہوگا ؛



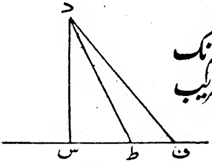
مفروض	فرض کرو کہ دیے ہوئے نقطہ و سے خطِ مستقیم اب تک دو خط کھینچے گئے ہیں وط اور وس جن میں سے وس خط اب پر عمود ہے ؛
مطلوب	وس چھوٹا ہے وط سے ؛
ثبوت	خارجہ زاویہ وسب بڑا ہے داخلہ متقابلہ زاویہ وطس سے مگر وسب = وسط (کیونکہ دونوں قائمے ہیں) ∴ وسط بڑا ہے وطس سے ∴ متقابلہ ضلع وط بڑا ہے وس سے ∴ وس چھوٹا ہے وط سے (فہو المطلوب)
	نوٹ : کسی نقطے پر سے کسی خط پر گرایا ہوا عمود اُس نقطے اور خط کے درمیان کا فاصلہ کہلاتا ہے ؛

مسئلہ 16 کا دُوسرا ثبوت:-

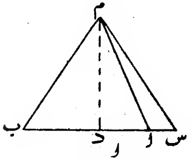


اگر وس سب سے چھوٹا خط نہیں تو
فرض کرو وط سب سے چھوٹا خط ہے۔ پس
وس > وط ∴ وطس > وسط سے
لیکن وسط قائمہ ہے اس لیے وطس
قائمے سے بڑا ہے۔
پس △ وسط میں دو زاویوں کا مجموعہ دو قائموں سے بڑا ہے جو ناممکن ہے۔
اِس لیے یقیناً عمود وس ہی سب سے چھوٹا ہے ؛

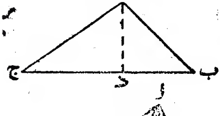
مشق 16



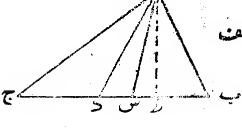
1 اگر دیے ہوئے نقطے سے کِسی خطِ مستقیم تک چند خطوط کھینچے جائیں تو عمود سے قریب کا خط عمود سے بعید کے خط سے کم ہوگا ؛



2 دِیے ہُوئے نقطے سے دیے ہُوئے خطِ مستقیم تک دو مساوی خطوط کھینچے جا سکتے ہیں۔ جن میں سے ایک عمود کے ایک طرف ہوگا اور دُوسرا دُوسری طرف ؛



3 اگر کِسی نقطے سے کِسی خطِ مستقیم تک چند خطوط کھینچے جائیں تو دو آڑے خطوط مستقیم میں سے وُہ چھوٹا ہوگا جو عمود کے ساتھ چھوٹا زاویہ بناتا ہے ؛

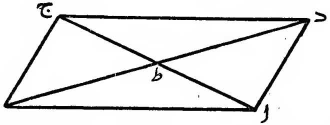


4 کِسی مثلّث کا احاطہ تینوں راسی عمودوں کے مجموعے سے بڑا ہوتا ہے ؛
5 مختلف الاضلاع مثلّث میں راسی زاویہ کا ناصف راسی وسطانیہ سے بڑا نہیں ہو سکتا ؛
6 ایسے منحرف خطوط جو کِسی عمود سے یکساں فاصلے پر ہوں برابر ہوتے ہیں ؛

مسئلہ 17

(اثباتی)

متوازی الاضلاع کے مقابل کے اضلاع اور زاویے آپس میں برابر ہوتے ہیں۔ ہر وتر متوازی الاضلاع کی تنصیف کرتا ہے اور وتر ایک دوسرے کی تنصیف کرتے ہیں ؛

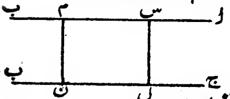


مفروض	فرض کرو اب ج د ایک متوازی الاضلاع ہے جس کے وتر اج ، ب د نقطہ ط پر ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں ؛
مطلوب	(۱) اب = دج ، ب ج = اد (2) ا = ج ، ب = د (3) اج شکل اب ج د کی تنصیف کرتا ہے اسی طرح ب د شکل کی تنصیف کرتا ہے (4) اط = طج اور ب ط = طد
ثبوت	∵ اب ‖ دج اور ب د ان سے ملتا ہے ؛ ∴ ا ب د = ب د ج (متبادلہ زاویے) ∵ اد ‖ ب ج اور ب د ان سے ملتا ہے ؛ ∴ ا د ب = د ب ج (متبادلہ زاویے) اب △ ا ب د اور △ ب د ج میں ∵ ا ب د = ب د ج اور ا د ب = د ب ج اور ب د مشترک ہے ∴ دونوں مثلث منطبق ہیں ؛ پس (۱) اب = دج ، ب ج = اد (2) ا = ج (3) ب د شکل کی تنصیف کرتا ہے ؛ اسی طرح ثابت کیا جا سکتا ہے کہ اج شکل کی تنصیف کرتا ہے اور ب = د پھر △ اطب اور دطج میں ∵ ا ب ط = ط د ج ، ا ط ب = د ط ج اور اب = دج ∴ △ن منطبق ہیں۔ اور (4) اط = طج اور ب ط = د ط (فھو المطلوب)

مشق 17

1 مسئلہ نمبر 17 کا عکس ثابت کرو یعنی ایک چوکور متوازی الاضلاع ہوگا اگر مقابل کے زاویوں کے جوڑے برابر ہوں یا (2) مقابل کے اِضلاع برابر ہوں یا (3) اُس کے وتر ایک دوسرے کی تنصیف کریں ۔

2 اگر کسی ||ع کے متصلہ ضلعے برابر ہوں تو اُس کے تمام اضلاع برابر ہوں گے ۔



3 متوازی خطوطِ مستقیم ہمیشہ ایک دوسرے سے ایک ہی فاصلے پر رہتے ہیں ۔

4 ثابت کرو کہ مستطیل کے وتر برابر ہوتے ہیں ۔

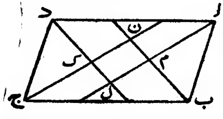
5 ثابت کرو کہ مربّع کے وتر (1) باہم عمود ہوتے ہیں (2) باہم مساوی ہوتے ہیں (3) مربّع کے زاویوں کی تنصیف کرتے ہیں ۔

6 ثابت کرو کہ معیّن کے وتر (1) باہم عمود ہوتے ہیں (2) معیّن کے زاویوں کی تنصیف کرتے ہیں ۔

7 ||ع اب ج د میں ک اور ل خطوط بج اور اد کے وسطی نقطے ہیں ثابت کرو اک ج ل ||ع ہے ۔

8 اگر متوازی الاضلاع کا ایک وتر اپنے سرے کے زاویوں کی تنصیف کرے تو ||ع یا تو مربّع ہے یا معیّن ۔

9 ||ع کے کسی ایک ضلع کے ہر دو انجاموں کے زاویوں کے ناصف ایک دوسرے پر عمود ہوں گے ۔



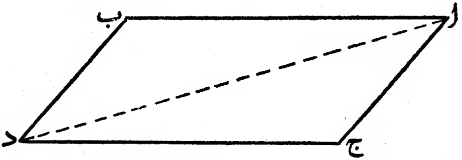
10 ||ع کے دو مقابل کے زاویوں کے ناصف متوازی ہوں گے اور ||ع کے تمام زاویوں کے ناصف ایک مستطیل بنائیں گے جس کے وتر ||ع کے اضلاع کے متوازی ہوں گے ۔

11 ثابت کرو کہ اگر مستطیل کے اضلاع کے وسطی نقاط بالتّرتیب باہم ملائے جائیں تو شکل معیّن حاصل ہوگی اور اگر اس معیّن کے اضلاع کے وسطی نقاط بالتّرتیب ملائے جائیں تو شکل مستطیل حاصل ہوگی ۔

مسئلہ 18

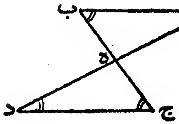
(اثباتی)

خطوطِ مستقیم جو دو برابر اور متوازی خطوطِ مستقیم کے ایک طرف کے سروں کو ملاتے ہیں آپس میں برابر اور متوازی ہوتے ہیں ۔

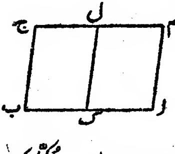


مفروض	اب ‖ اور = جد
مطلوب	اج ‖ اور = بد
عمل	اد کو ملاؤ
ثبوت	∵ اب ‖ جد اور اد اُن کو ملاتا ہے (مفروض) ∴ ب‌اد = ادج (متبادلہ زاویے) اب تکون ابد اور تکون اجد میں اب = جد ب‌اد = ادج اد مشترک ہے ∴ دونوں مثلث باہم منطبق ہیں۔ ∴ اج = بد اور ادب = داج جو خطوط اج ، بد کے متبادلہ زاویے ہیں ∴ اج ‖ بد (فھو المطلوب)

مشق 18



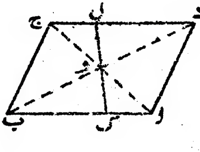
1 اگر دو خطوطِ مستقیم باہم برابر اور متوازی ہوں تو اُن کے مقابل کے سروں کو ملانے والے خطوط ایک دوسرے کی تنصیف کریں گے ؎



2 اگر کسی ||ع کے وتر برابر ہوں تو وہ شکل مستطیل ہوگی ؎

3 وہ خطِ مستقیم جو ||ع کے متقابلہ اضلاع کے وسطی نقطوں کو ملائے دوسرے دو اضلاع کے || ہوگا ؎

4 ا ب ج د ایک ||ع ہے اور ط کوئی نقطہ اس کے اندر واقع ہے۔ ||ع ط و ک ب ، ط ب ل ج ، ط ج م د ، ط د ن و مکمل کر لیے گئے ہیں ثابت کرو کہ ک ل م ن ||ع ہے ؎



5 اگر کوئی خطِ مستقیم ||ع کے وتروں کے نقطۂ تقاطع میں سے گزرے اور ||ع کے متقابلہ اضلاع پر ختم ہو تو وہ نقطۂ تقاطع پر تنصیف ہوگا ؎

6 سوال نمبر 5 میں ثابت کرو کہ وہ خطِ مستقیم ||ع کی تنصیف کرے گا ؎

7 کسی دیے ہوئے نقطے سے ایک خط کھینچ کر ||ع کی تنصیف کرو ؎

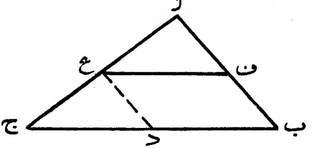
8 اگر کسی چوکور کے متقابلہ زاویے برابر ہوں تو باقی زاویوں کے خطِ تنصیف متوازی ہوں گے ؎

9 وہ خطوطِ مستقیم جو کسی معیّن کے چاروں کونوں سے وتروں کے متوازی کھینچے جاتے ہیں۔ ایک مستطیل بناتے ہیں ؎

مسئلہ 19

(اثباتی)

اگر مثلث کے کسی ضلع کے وسطی نقطے سے دوسرے ضلع کے متوازی خطِ مستقیم کھینچا جائے تو وہ تیسرے ضلع کی تنصیف کرے گا۔

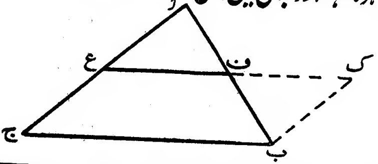


مفروض	فرض کرو ایک △ اب ج ہے جس میں اب کا وسطی نقطہ ف ہے اور فع ‖ ب ج
مطلوب	اع = ع ج
عمل	ع سے خط ع د خط اب کے متوازی کھینچو
ثبوت	∵ ف ع ‖ ب د اور ع د ‖ ف ب ∴ ف ع د ب متوازی الاضلاع ہے ∴ ع د = ف ب = ا ف ∵ ع د ‖ اب اور اج ان کو ملتا ہے ∴ ج ع د = ا (متناظرہ زاویے) اور ف ع ‖ ج د اور اج ان کو ملتا ہے ∴ اع ف = ج (متناظرہ زاویے) اب △ ان اع ف اور ع ج د میں ∵ ا = ج ع د (ثابت شدہ) اع ف = ج 〃 اف = ع د 〃 ∴ △ اع ف ≡ △ ع ج د (ز۔ز۔ض = ز۔ز۔ض) ∴ اع = ع ج (فہو المطلوب)

مسئلہ 19 کا عکس

(اثباتی)

جو خطِ مستقیم مثلّث کے دو ضلعوں کے نقاطِ وسطی کو ملاتا ہے وہ تیسرے ضلع کا متوازی ہوتا ہے اور لمبائی میں اُس سے نصف ؛

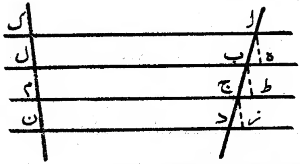


مفروض	فرض کرو مثلّث ا ب ج میں ا ب کا نقطۂ وسطی ف ہے اور ا ج کا نقطۂ وسطی ع ہے اور ف ع اُن کو ملاتا ہے ؛
مطلوب	(۱) ف ع ‖ ب ج (۲) ف ع = ½ ب ج
عمل	نقطہ ب سے خط ب ک خط ج ا کے ‖ کھینچو جو ع ف خارج شدہ سے ک پر ملے ؛
ثبوت	△ن ا ف ع ، ب ف ک میں ف اَ ع = ف بَ ک (متبادلہ زاویے) ؛ ا ع ‖ ب ک ا فَ ع = ب فَ ک (راسی متقابلہ زاویے) ا ف = ف ب (مفروض) ∴ △ ا ف ع ≡ △ ب ف ک (ز-ز-ض = ز-ز-ض) ∴ ف ع = ک ف = ½ ک ع نیز ب ک = ا ع = ع ج اور ب ک ‖ ہے ج ع کا ∴ ب ج ع ک متوازی الاضلاع ہے اور ک ع اور ب ج متوازی اور مساوی ہیں ؛ پس ف ع = ½ ک ع = ½ ب ج (فہو المطلوب)

مسئلہ 20

(اثباتی)

اگر تین یا زیادہ متوازی خطوطِ مستقیم کسی خطِ قاطع پر مساوی ٹکڑے کاٹیں تو وُہ ہر خطِ قاطع پر اُسی نظیر کے مساوی ٹکڑے کاٹیں گے ۔



مفروض

اک ، ب ل ، ج م ، د ن متوازی خطوط ہیں خط ا ب ج د ان کو اِس طرح کاٹتا ہے کہ اب = ب ج = ج د

ک ل م ن کوئی دُوسرا خط ان کو ک ، ل ، م ، ن پر کاٹتا ہے ۔

مطلوب

ک ل = ل م = م ن

عمل

ا ، ب ، ج سے اہ ، ب ط ، ج س خط ک ل م ن کے || کھینچو ۔

ثبوت

∵ ب ل || ج م ∴ ب اہ = ب ج ط (متناظرہ زاویے)

نیز اہ || ب ط ∴ ب اہ = ج ب ط (")

پس △ن اب ہ اور ب ج ط میں

∵ { ا ب ہ = ب ج ط (ث ۔ ش)
ب اہ = ج ب ط (" ")
اب = ب ج (مفروض) }

∴ △ اب ہ ≡ △ ب ج ط

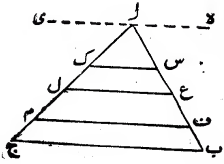
∴ اہ = ب ط

لیکن ا ہ ل ک اور ب ط م ل متوازی الاضلاع ہیں (بروئے عمل)

∴ اہ = ک ل اور ب ط = ل م

∴ ک ل = ل م اِسی طرح ل م = م ن

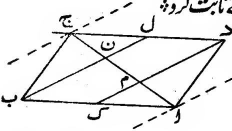
∴ ک ل = ل م = م ن (فہو المطلوب)



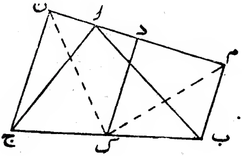
نتیجۂ صریح: اگر کسی مثلث کا ایک ضلع چند مساوی حصوں میں منقسم ہو اور نقاطِ تقسیم سے قاعدے کے متوازی خطوط کھینچے جائیں تو دوسرا ضلع بھی اُتنے ہی برابر حصوں میں تقسیم ہو جائے گا۔

مشق 20،19

1 مسئلہ نمبر 19 کو نتیجۂ صریح مندرجۂ بالا سے ثابت کرو۔

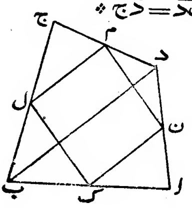


2 اب ج د ایک ۱۱ع ہے ک، ل خطوط اب، ج د کے وسطی نقاط ہیں ثابت کرو ب ل اور د ک وتر اج کو تین مساوی حصوں میں تقسیم کرتے ہیں۔



3 △ اب ج میں اگر راس ا سے کوئی خط کھینچا جائے اور ب م اور ج ن اُس پر عمود ہوں تو ثابت کرو ک م = ک ن جہاں ک خط ب ج کا وسطی نقطہ ہے۔

4 کسی دیے ہوئے زاویہ ا میں کوئی نقطہ د ہے اس میں سے خطِ مستقیم ب د ج کھینچو کہ ب د = د ج۔



5 ذوار بعۃ الاضلاع کے متصلہ اضلاع کے وسطی نقاط کو ملایا جائے تو شکل متوازی الاضلاع پیدا ہوتی ہے۔

6 ذوار بعۃ الاضلاع کے متقابلہ اضلاع کے وسطی نقاط کو ملانے والے خطوط ایک دوسرے کی تنصیف کرتے ہیں۔

متفرق سوالات نمبر 1

نقطے پر کے زاویے

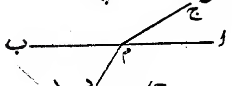
1 ثابت کرو (۱) $22^\circ 30'$ اپنے تتمہ (سپلیمنٹری) زاویے کا $\frac{1}{7}$ ہے ۔

(2) $177^\circ 8' 34\frac{2}{7}''$ اپنے تکمیلی (کامپلیمنٹری) زاویے کا چھ گنا ہے ۔

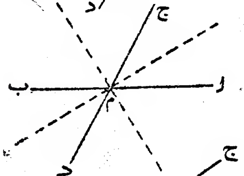
2 ایک خطِ مستقیم پہلے $2\frac{1}{2}^\circ$ میں سے گھمایا گیا ہے اور پھر 35° میں سے ۔ بتاؤ اب سے اور کتنا گھمایا جائے کہ وُہ دوبارہ اپنے پہلے مقام کی سیدھ میں آجائے ؟

3 بتاؤ مندرجۂ ذیل اوقات میں گھڑی کی سوئیوں کے درمیان کیا زاویے ہیں ؟

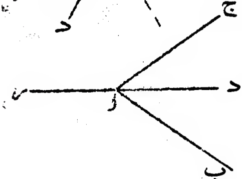
(۱) نو بجے (2) ساڑھے نو بجے (3) نو بج کر 45 منٹ پر



4 چار خطِ مستقیم ایک نقطے پر ملتے ہیں اگر دو متصلہ زاویے دُوسرے دو متصلہ زاویوں کے برابر ہوں تو ثابت کرو کہ دو خط ایک ہی خطِ مستقیم میں ہیں ۔



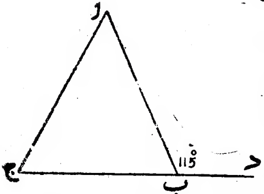
5 دو خطوطِ مستقیم کے تقاطع سے جو چار زاویے پیدا ہوتے ہیں ان کے ناصف ایک دُوسرے کے ساتھ قائمہ زاویہ بناتے ہیں ۔



6 خط ا د زاویہ ب ا ج کی تنصیف کرتا ہے اگر ا س ایسا خط کھینچا جائے کہ ج اْ س = ب اْ س تو ثابت کرو کہ د ا س خطِ مستقیم ہے ۔

7 خطِ مستقیم کے کسی نقطے سے اگر بالمقابل سمتوں میں دو عمود کھینچے جائیں تو وُہ ایک ہی خطِ مستقیم میں واقع ہوں گے ۔

8 مسئلہ نمبر 2 کا عکس ثابت کرو ۔ یعنی اگر چار خطِ مستقیم ایک نقطے پر مل کر دو غیر متصل زاویوں کو برابر بنائیں تو چاروں خط دو دو کرکے ایک ہی خطِ مستقیم میں ہوں گے ۔

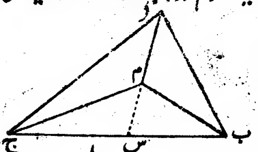


24 ایک مُساوی السّاقین مثلّث کا بیرونی زاویہ جو قاعدے پر واقع ہے $115°$ ہے۔ باقی کے زاویے معلوم کرو۔

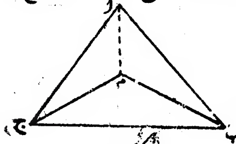
25 ایک قائم الزّاویہ مُساوی السّاقین مثلّث کے تمام زاویے معلوم کرو۔

26 اگر ایک نقطے سے کسی زاویے کے بازوؤں پر عمود گرائے جائیں تو عمودوں کا باہمی زاویہ دیے ہوئے زاویے کے مساوی ہوگا یا اُس کا تتمّہ زاویہ۔

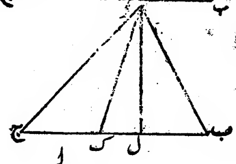
27 مُساوی السّاقین مثلّث کے زاویے معلوم کرو جب قاعدے کا زاویہ راسی زاویے سے
(۱) نصف ہے (2) دگنا ہے۔



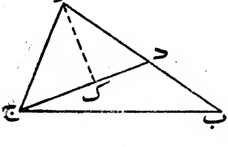
28 اگر م کوئی نقطہ مثلّث ا ب ج کے اندر واقع ہو تو ثابت کرو:-
ب م ج = ا + ا ب م + ا ج م



29 اگر ب م اور ج م مثلّث کے زوایائے ب ج کے ناصف ہوں تو ثابت کرو ب م ج منفرجہ ہے اور $90° + \frac{1}{2}$ ا کے برابر ہے۔

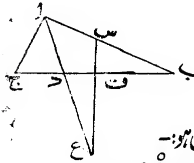


30 اگر △ ا ب ج میں ا ک زاویہ ا کا ناصف ہو اور ا ل، ب ج پر عمود ہو تو ثابت کرو:-
ب، ج کا فرق = 2 ک ا ل



31 اگر △ ا ب ج میں ج ک عمود ہے د ک پر جو ا کا ناصف ہے تو
ا ج ک = $\frac{1}{2}$ (ب + ج)
اور ک ج ب = $\frac{1}{2}$ (ب − ج)

32 △ ا ب ج میں ا د ع، ا کا ناصف ہے اور س ف ع خط ب ج



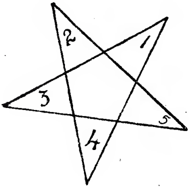
عمودی ناصف ہے۔ ثابت کرو کہ

ف ع ا = $\frac{1}{2}$ (ب̂ - ج̂)

33 کیا ایسے منتظم کثیر الاضلاع ممکن الوجود ہیں جن کے داخلہ زاویوں کی پیمائش حسب ذیل ہو:-

(1) 130° (2) 140° (3) 135° (4) 153° (5) 148°

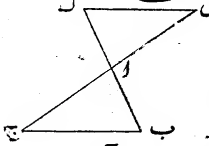
34 (ا) ایک مخمس کے متبادلہ اضلاع کو اس طرح بڑھایا گیا ہے کہ ایک تارے کی شکل بن گئی ہے۔ ثابت کرو کہ راسی زاویوں کا مجموعہ دو قائموں کے برابر ہے۔



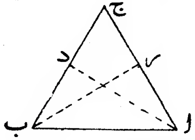
(ب) اگر ایسا ہی عمل ایک مسدس کے ساتھ کیا جائے تو ثابت کرو کہ راسی زاویوں کا مجموعہ چار قائموں کے برابر ہوگا۔

35 اگر کسی کثیر الاضلاع کے متبادلہ اضلاع کا ہر جوڑا بڑھا کر ملایا جائے تو ثابت کرو کہ جو زاویے اس طرح پیدا ہوں گے۔ اُن کا مجموعہ اضلاع کے دُگنے قائموں سے بقدر 8 قائمے کم ہوگا۔

منطبق اور متساوی الساقین مثلث



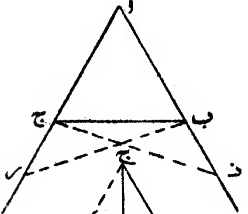
36 △ ا ب ج کے اضلاع ب ا ، ج ا کو نقاط ک ، ل تک اس طرح بڑھایا گیا ہے کہ ا ک = ا ب اور ا ل = ا ج ثابت کرو کہ ک ل ∥ ب ج



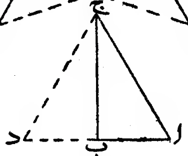
37 کسی متساوی الساقین مثلث میں قاعدہ کے سروں کو اضلاع مقابل کے نقاطِ وسطی سے ملانے والے خطوط باہم متساوی ہوتے ہیں۔

38 متساوی الاضلاع △ کے وسطانیے باہم برابر ہوتے ہیں۔

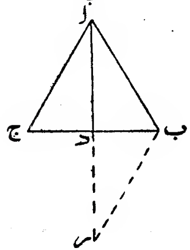
حل اِن اضلاع پر
باقی دو اضلاع باہم مساوی ہوں گے ۔



ا ب ج متساوی السّاقین
مثلث ہے اُس کے مساوی
اضلاع ا ب ، ا ج نقاط
د ، س تک بڑھائے گئے ہیں
اس طور پر کہ ب د = ج س
ثابت کرو ب س = ج د

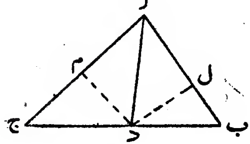


41 قائم الزّوایہ مثلّث ا ب ج
میں اگر ا ج = 2 ا ب ہو
تو ثابت کرو ا̂ = 60° ۔



42 اگر کسی مثلّث کے راسی زاویہ
کا ناصف قاعدے کی تنصیف
کرے تو ثابت کرو کہ △
مُتساوی السّاقین ہے ۔

43 اگر کسی مثلّث کے راسی زاویہ
کا ناصف قاعدے پر عمُود ہو تو
ثابت کرو کہ :-
مثلّث مُتساوی السّاقین ہے ۔

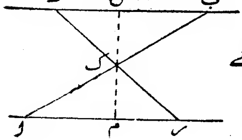


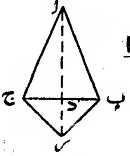
44 وُہ نقطہ جہاں کسی مثلّث کے
راسی زاویے کا ناصف قاعدہ
پر آکر ملتا ہے ۔ باقی دونوں
اضلاع سے مُساوی البُعد
ہے ۔

45 اگر دو مُتساوی السّاقین
مثلّثوں کا قاعدہ مُشترک ہو تو

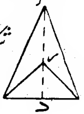
اُن کے راسوں کو مِلانے والا خط قاعدے کی عمودًا تنصیف کرے گا۔

شکل ع۱

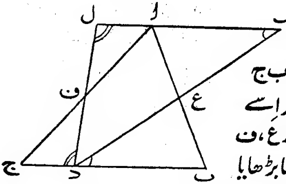




شکل ع۲

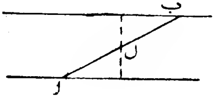


46 اگر مثلث ا ب ج کے ضلع ب ج میں کوئی نقطہ د لیا جائے اور اسے $\overline{\text{ا ب}}$ ، $\overline{\text{ا ج}}$ کے وسطی نقاط ع، ف سے مِلا کر ک اور ل تک اتنا بڑھایا جائے کہ ع ک = د ع اور ف ل = د ف۔ تو ثابت کرو ک ل نقطہ ا میں سے گزرے گا اور ضلع ب ج کے متوازی ہوگا (ض-ز-ض = ض-ز-ض)



47 اگر کسی نقطے میں سے جو دو متوازی خطوں سے یکساں فاصلے پر ہو کوئی خط متوازی خطوں سے مِلتا ہوا کھینچا جائے تو اس خط کی دیے ہوئے نقطے پر تنصیف ہوگی۔

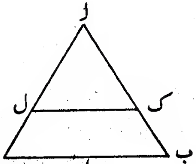
(ض-ز-ض = ض-ز-ض)



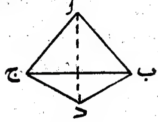
48 اگر کسی نقطے میں سے جو دو متوازی خطوط سے یکساں فاصلے پر ہو دو خطِ مستقیم متوازی خطوط کو قطع کرتے ہوئے کھینچے جائیں۔ تو متوازی خطوط کے وہ ٹکڑے جو اس طرح بنیں گے برابر ہوں گے۔

(ز-ز-ض = ز-ز-ض)

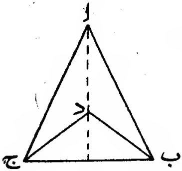
49 متساوی الساقین مثلث ا ب ج



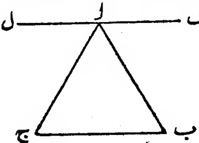
کے ضلع اب میں ایک نقطہ ک
سے ک ل قاعدہ ب ج کے
متوازی کھینچا گیا ہے جو ا ج کو
نقطہ ل پر ملتا ہے۔ ثابت کرو
△ اک ل مساوی الساقین ہے



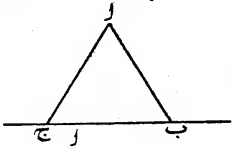
5 اب ج اور د ب ج دو متساوی الساقین
مثلث ہیں جو قاعدہ ب ج کی متقابل
سمتوں میں واقع ہیں۔ ثابت کرو:-
ا ب̂ د = ا ج̂ د



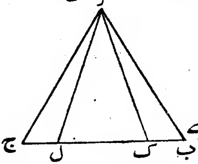
51 اب ج اور د ب ج دو متساوی الساقین
مثلث ہیں جو قاعدہ ب ج کے
ایک ہی جانب واقع ہیں۔ ثابت
کرو:-
ا ب̂ د = ا ج̂ د



52 ایک متساوی الساقین اب ج
کے نقطۂ راس ا سے خط ک ل
کھینچا گیا ہے جو ب ج کے متوازی
ہے ثابت کرو ک ا̂ ب = ل ا̂ ج

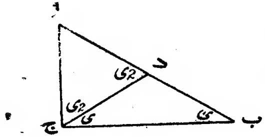


53 اگر کسی مثلث کا قاعدہ دونوں
طرف بڑھا دیا جائے اور خارجہ زاویے
باہم برابر ہوں تو ثابت کرو وہ مثلث
متساوی الساقین ہے۔

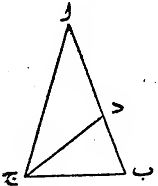


ایک متساوی الساقین مثلث
اب ج کے قاعدہ ب ج میں دو
نقطے ک اور ل اس طرح لیے
گئے ہیں کہ ب ک = ج ل
ثابت کرو △ اک ل متساوی الساقین ہے
ہے؛ (ض۔ز۔ض = ض۔ز۔ض)

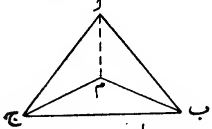
55 ثابت کرو کہ اگر کسی مثلّث کا ایک زاویہ کسی دوسرے زاویے سے تین گنا ہو تو وہ مثلّث دو مساوی السّاقین مثلثوں میں تقسیم ہو سکتا ہے ؎



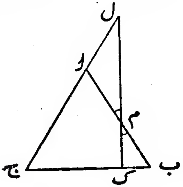
56 کسی متساوی السّاقین مثلّث کے قاعدے کا ہر زاویہ راسی زاویے سے دگنا ہے ثابت کرو قاعدے کے کسی زاویے کا ناصف △ کو دو متساوی السّاقین تکونوں میں تقسیم کر دے گا ؎



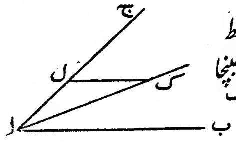
57 متساوی السّاقین مثلّث اب ج میں دو مساوی زاویوں ب̂ ، ج̂ کے خطوط ناصف م پر ملتے ہیں ثابت کرو کہ ام زاویہ ا کی تنصیف کرتا ہے ؎



58 اب ج ایک مثلّث متساوی السّاقین ہے۔ قاعدہ ب ج پر کوئی عمود اب اور اج کو نقاط م، ل پر ملتا ہے ثابت کرو △ ال م متساوی السّاقین △ ہے ؎

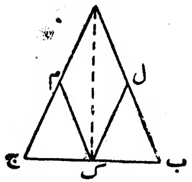


59 نقطہ ک سے جو زاویہ ب اج کے ناصف پر واقع ہے ایک خط ک ل خط اب کے متوازی کھینچا گیا ہے ثابت کرو △ ل ا ک متساوی السّاقین ہے ؎

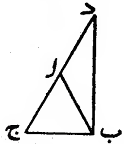


60 ثابت کرو کہ متساوی السّاقین کے قاعدے کے زاویوں کے ناصف باہم برابر ہوتے ہیں ؎

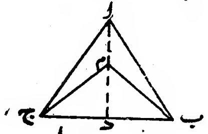
61 مثلث ا ب ج میں ا ب = ا ج
اگر ک، ل، م، ب ج ، ب ا ،
ا ج کے نقاطِ وسطی ہوں تو ثابت کرو
کہ ک ل = ک م اور ا م ک
= ا ل ک اور شکل ا ل ک م
ایک معیّن ہے ۔



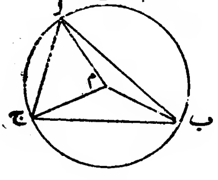
62 نقطہ ا متساوی الساقین △ ا ب ج
کا راس ہے ج ا کو اتنا بڑھایا گیا
ہے کہ ا د = ا ب ثابت کرو
د ب قاعدہ ب ج پر عمود ہے ۔



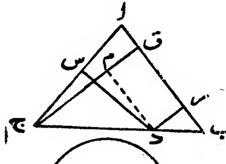
63 اگر دو متساوی الساقین مثلث ایک
ہی قاعدے پر اور ایک ہی سمت میں
واقع ہوں تو ثابت کرو کہ ایک مثلث
دوسرے مثلث کے اندر رہے گا ۔

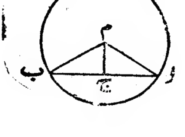


64 ا ، ب ، ج تین نقطے ایک ایسے
دائرے پر واقع ہیں۔ جس کا مرکز م
ہے ۔ اگر ا م ج = 80° اور
ب م ج = 130° تو مثلث
ا ب ج کے زاویے معلوم کرو ۔



65 اگر کسی نقطے سے جو متساوی الساقین
مثلث کے قاعدے پر واقع ہے
دوسرے اضلاع پر دو عمود گرائے
جائیں تو ان کا مجموعہ اس عمود کے
برابر ہوگا۔ جو قاعدے کے ایک
کونے سے مقابل کے ضلع پر گرایا
جائے ۔

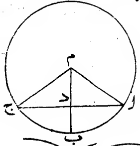




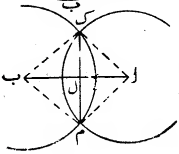
66 اگر دائرے کے مرکز م کو وتر
ا ب کے وسطی نقطہ ج سے ملایا

جائے تو ثابت کرو م ج وتر اب پر عمود ہے ؞

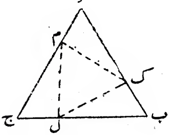
67 اگر م ا ، م ب ، م ج کسی دائرے کے تین نصف قطر ہوں اور ا م ب = ج م ب تو ثابت کرو کہ نصف قطر م ب وتر ا ج کی تنصیف کرتا ہے ؞



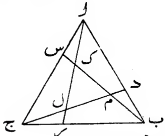
68 دو دائرے نقاط ک ، م پر ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں اگر ا ، ب دائروں کے مرکز ہوں تو ثابت کرو کہ ا ب خط ک م کا عمودی ناصف ہے ؞



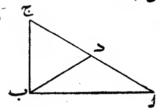
69 ا ب ج ایک متساوی الاضلاع مثلث ہے ۔ ک ، ل ، م اضلاع ا ب ، ب ج ، ج ا میں نقاط ہیں جو اِس طرح لگائے گئے ہیں کہ ا ک = ب ل = ج م ثابت کرو ک ل م متساوی الاضلاع △ ہے ؞

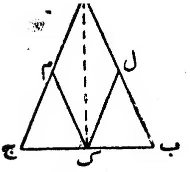


70 د ، ر ، س تین نقاط ہیں ۔ جو متساوی الاضلاع △ ا ب ج کے اضلاع ا ب ، ب ج ، ج ا پر اِس طرح واقع ہیں کہ ا د = ب ر = ج س ثابت کرو ا ر ، ب س ، ج د کے تقاطع سے جو △ بنتا ہے وہ بھی متساوی الاضلاع ہے ؞

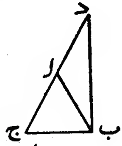


71 اگر قائم الزاویہ △ ا ب ج میں جس کا زاویہ ب قائمہ ہے خط ب د وتر تک اِس طرح کھینچا جائے کہ ا ب د = ب ا ج ، تو ثابت کرو کہ ا ج کا نقطہ تنصیف د ہے ؞

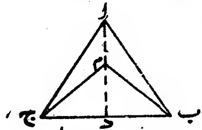




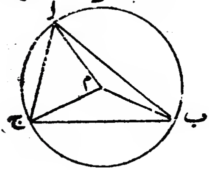
م، ب ج ، ب ک،
ا ج کے نقاطِ وسطی ہوں تو ثابت کرو
کہ ک ل = ک م اور ا م ک
= ا ل ک اور شکل ا ل ک م
ایک مُعیّن ہے ؁



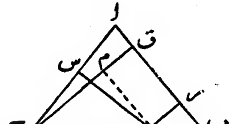
62 نقطہ ا متساوی السّاقین △ ا ب ج
کا راس ہے ج ا کو اتنا بڑھایا گیا
ہے کہ ا د = ا ب ثابت کرو
د ب قاعدہ ب ج پر عمُود ہے ؁



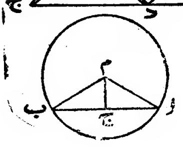
63 اگر دو متساوی السّاقین مثلّث ایک
ہی قاعدے پر اور ایک ہی سمت میں
واقع ہوں تو ثابت کرو کہ ایک مثلّث
دُوسرے مثلّث کے اندر رہے گا ؁



64 ا ، ب ، ج تین نقطے ایک ایسے
دائرے پر واقع ہیں جس کا مرکز م
ہے۔ اگر ا م ج = 80° اور
ب م ج = 130° تو مثلّث
ا ب ج کے زاویے معلوم کرو ؁

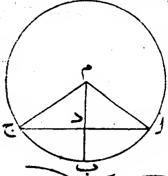


65 اگر کسی نقطے سے جو متساوی السّاقین
مثلّث کے قاعدے پر واقع ہے
دُوسرے اضلاع پر دو عمُود گرائے
جائیں تو ان کا مجمُوعہ اس عمُود کے
برابر ہوگا۔ جو قاعدے کے ایک
کونے سے مقابل کے ضلع پر گرایا
جائے ؁

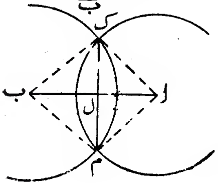


66 اگر دائرے کے مرکز م کو وتر
ا ب کے وسطی نقطہ ج سے ملایا

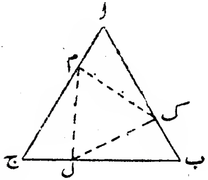
جائے تو و ب ہے ؛



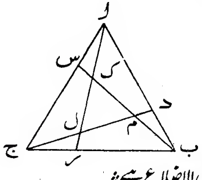
67 اگر م ا ، م ب ، م ج دائرے کے تین نصف قطر ہوں اور ا م ب = ج م ب تو ثابت کرو کہ نصف قطر م ب وتر ا ج کی تنصیف کرتا ہے ؛



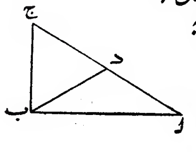
68 دو دائرے نقاط ک ، م پر ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں اگر ا ، ب دائروں کے مرکز ہوں تو ثابت کرو کہ ا ب خط ک م کا عمودی ناصف ہے ؛



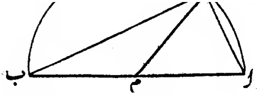
69 ا ب ج ایک متساوی الاضلاع مثلث ہے ۔ ک ، ل ، م اضلاع ا ب ، ب ج ، ج ا میں نقاط ہیں جو اس طرح لگائے گئے ہیں کہ ا ک = ب ل = ج م ثابت کرو ک ل م متساوی الاضلاع △ ہے ؛



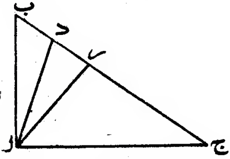
70 د ، ر ، س تین نقاط ہیں ۔ جو متساوی الاضلاع △ ا ب ج کے اضلاع ا ب ، ب ج ، ج ا پر اس طرح واقع ہیں کہ ا د = ب ر = ج س ثابت کرو ا ر ، ب س ، ج د کے نقاطع سے جو △ بنتا ہے وہ بھی متساوی الاضلاع ہے ؛



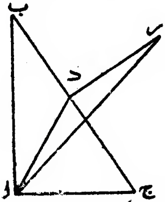
71 اگر قائم الزاویہ △ ا ب ج میں جس کا زاویہ ب قائمہ ہے خط ب د وتر تک اس طرح کھینچا جائے کہ ا ب د = ب ا ج تو ثابت کرو کہ ا ج کا نقطہ تنصیف د ہے ؛



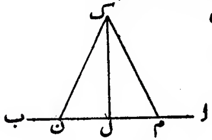
قائم الزاویہ △ میں قائمہ زاویے
وُتر کے وسطی نُقطے سے مِلانے والا خط
وتر کا نصف ہوتا ہے ۔



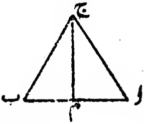
73 قائمۃ الزّاویہ مُثلّث ب ا ج کے وُتر ب ج پر ایک نُقطہ د ایسا لیا گیا ہے کہ ج د = ج ا نقطہ ا سے ب ج پر ا ر عمُود گرایا گیا ہے۔ ثابت کرو ا د زاویہ ب ا ر کا ناصِف ہے ۔



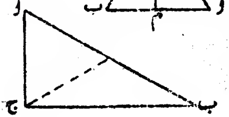
74 اگر ایک قائم الزّاویہ مُثلّث ا ب ج میں زاویہ قائمہ ا سے وُتر ب ج تک خط ا د اِس طرح کھینچا جائے کہ ج ا̂ د = ج̂ اور اگر د ر وُتر پر (قائمے کی مخالف سمت میں) عمُود نکالا جائے اور د ر = د ا تو ثابت کرو کہ ر ا زاویہ قائمہ ب ا ج کی تنصیف کرتا ہے ۔



75 اگر کسی نقطہ ک سے ا ب پر عمُود ک ل گرایا جائے اور ک م اور ک ن دو ایسے آڑے خط ہوں کہ ل ک̂ م = ل ک̂ ن تو ثابت کرو ک م = ک ن

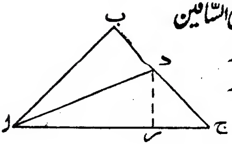


76 اگر ایک خطِ مُستقیم ا ب کے وسطی نُقطہ م سے اِس پر عمُود نکالا جائے تو ثابت کرو کہ اس عمُود پر کا ہر نقطہ ا، ب سے مُساوی البُعد ہوگا ۔



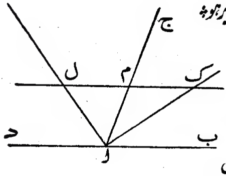
77 اگر قائم الزّاویہ مُثلّث میں ایک زاویہ دُوسرے زاویے سے دُگنا ہو تو ثابت کرو کہ وَتر چھوٹے ضلع سے دُگنا ہوگا ۔

78 اب ج ایک قائم الزّاویہ متساوی السّاقین
مثلّث ہے۔ جس کا وتر اج ہے اگر
اد زاویہ ا کا ناصف ب ج کو د پر
ملے تو ثابت کرو:—

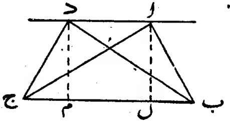


اب + ب د = اج

79 قائم الزّاویہ △ اب ج کے وتر
ب ج میں ایک ایسا نقطہ ن معلوم کرو کہ
ن سے اج پر گرایا ہوا عمود ن ب کے برابر ہو۔

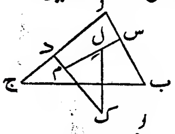


80 ب اج اور ج اد دو متّصلہ تتمّہ
زاویے ہیں۔ کوئی خط ک م ل، ب د
کے متوازی کھینچا گیا ہے جو زاویوں کے
ناصفوں کو ک اور ل پر اور اج کو نقطہ م
پر ملتا ہے ثابت کرو ام = م ک = م ل

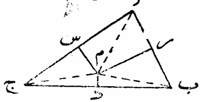


81 اگر دو منطبق مثلّث ایک ہی قاعدے
پر ایک ہی سمت میں واقع ہوں تو
ثابت کرو کہ راسوں کو ملانے والا خط
قاعدے کے متوازی ہوگا۔

82 اگر دو مثلّثوں میں ایک کے دو
اضلاع اور ان میں سے ایک ضلع کا وسطانیہ دوسرے مثلّث کے دو اضلاع
اور متناظرہ وسطانیہ کے برابر ہوں تو ثابت کرو کہ دونوں مثلّث منطبق ہیں۔

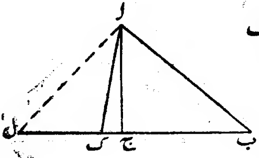


83 اگر مثلّث ک ل م کے اضلاع
مثلّث اب ج کے اضلاع پر
عمود ہوں تو ثابت کرو کہ دونوں
مثلّث متساوی الزّوایا ہیں۔

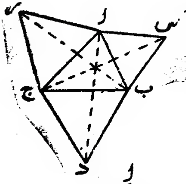


84 اب ج کوئی △ ہے د، ر،
س اضلاع ب ج ، اب ، اج
کے بالترتیب وسطی نقاط ہیں۔ اگر
د م اور ر م ضلع ب ج اور ب ا

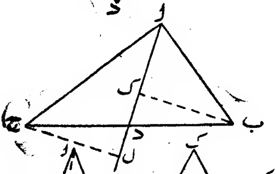
ا ب ج میں کسی نقطہ ن سے تینوں ضِلعوں کے عمُود باہم برابر ہوں تو
بت کرو ن ا ، ن ب ، ن ج راسی زاویوں کی تنصیف کرتے ہیں ؛
ی مثلّث کے داخلہ زاویوں کے خطوط تنصیف جس نقطے پر آ کر مِلیں وُہ سب
بڑے زاویے کے قریب تر اور سب سے چھوٹے زاویے سے دُور تر ہوتا
ے ؛

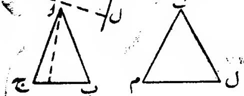


ر کسی مثلّث میں قاعدے پر کا ایک
ّہ زاویہ دُوسرے زاویے سے
ا ہو اور راس سے قاعدے پر عمُود
ھینچا جائے تو قاعدے کے دونوں
وں کا فرق چھوٹے ضِلع کے برابر
گا ؛



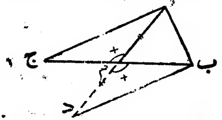
ر کسی مثلّث ا ب ج کے اضلاع
ا ب س ، ب ج د ، ج ا ر تین
ساوی الاضلاع △ بیرُونی سمت
بنائے جائیں تو ثابت کرو
ب ر = ج س
ا ب ج میں اگر ب ک اور
بہ ا د پر عمُود ہوں تو
و : ـــ
= د ک



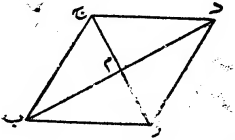


ک مثلّث کے دو ضِلعے دُوسرے
ث کے دو ضِلعوں کے برابر ہیں
ایک ضِلع کا مُتقابلہ زاویہ اِس کے
ی ضِلع کے مُتقابلہ زاویے کا مُساوی ہے تو ثابت کرو کہ دُوسرے مُساوی
وں کے مُتقابلہ زاویے برابر ہوں گے۔ یا ایک دُوسرے کا تمتّہ اور اگر
برہوں تو مثلّث منطبق ہوں گے ؛

دو بعے ا ب ن ک ا ب ج کے
اور ا ج ل م بنائے گئے ہیں۔ ثابت کرو △ ا ب م اور ا ک ج منطبق ہیں ؎



92 کسی مثلث کے کوئی سے دو اضلاع مل کر تیسرے ضلع پر کھچے ہوئے وسطانیہ کے دُگنے سے بڑے ہوتے ہیں ؎

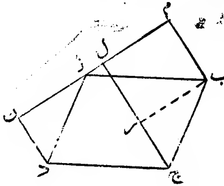


93 اگر ذوارلعتہ الاضلاع کے دونوں وتر اُن زاویوں کی تنصیف کریں جن میں سے وُہ گزرتے ہیں تو ثابت کرو شکل معیّن ہے یا مُربع ؎

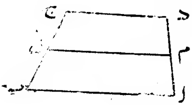
94 اگر کوئی چوکور مساوی الاضلاع ہو تو ثابت کرو اس کے متقابلہ زاویے برابر ہوں گے ؎

95 ا ب ج د ایک معیّن ہے جس کا وتر ا ج ہر ضلع کے برابر ہے۔ بتاؤ و د̂ ج اور ب د̂ ا کتنے درجے کے زاویے ہیں ؟

96 اگر △ ا ب ج کے قاعدہ ب ج کے وسطی نقطہ د سے ایک خطِ مستقیم ا ب کے متوازی کھینچا جائے اور وُہ ا کے اندرونی اور بیرونی خطوطِ تنصیف کو ل اور م پر قطع کرے تو ثابت کرو ل م = ا ج
[اشارہ: اگر ل م، ا ج کو ک پر قطع کرے تو ا ک = ک ل، ا ک = ک م اور ا ک = ک ج]

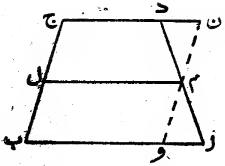


97 ا ب ج د ایک ||ع ہے ا سے ایک خطِ مستقیم م ا ن ||ع سے باہر کھینچا گیا ہے اور ج ل، ب م، د ن خط م ا ن پر عمود ہیں ثابت کرو :-
ب م + د ن = ج ل

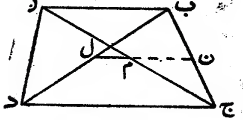


98 ا ب ج د ایک ذوزنقہ ہے۔ ل خط ب ج کا وسطی نقطہ ہے۔ ل سے ل م، ب ا کے || کھینچا گیا ہے۔

ہے ۔

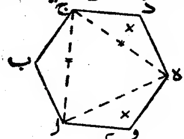


کسی ذوزنقہ کے غیر متوازی اضلاع
کے نقاطِ وسطی کو ملانے والا خط متوازی
اضلاع کے متوازی ہوتا ہے ۔ اور
لمبائی میں اُن کے مجموعے کے برابر
ہوتا ہے ۔

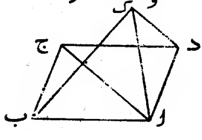


100 ثابت کرو کہ ذوزنقہ اب ج د
کے وتروں کے نقاطِ وسطی کو ملانے
والا خط $\frac{1}{2}$ (ج د − اب) کے
برابر ہوتا ہے ۔

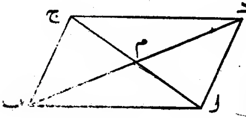
101 ثابت کرو اگر مسدس اب ج د ہ و
کے متقابلہ ضلعے متوازی اور مساوی ہوں تو اد ، ب ہ ، ج د ایک نقطے پر
ملیں گے ۔



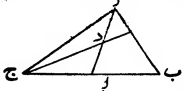
اب ج د ہ و منتظم مسدس
ہے ۔ ثابت کرو اج ہ
متساوی الاضلاع ہے ۔



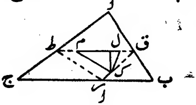
103 اب ج د ایک ||ع ہے
ب ک خط اج پر عمود ہے اور
د ک خط اج کے متوازی ہے
دونوں ک پر ملتے ہیں ۔ ثابت
کرو اک = ج د



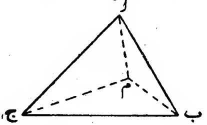
104 اب ج د ||ع ہے ۔
اگر وتر ب د وتر اج
سے بڑا ہو تو ثابت کرو
اَ بڑا ہے دَ سے ۔
مثلث اب ج کے
راسی ناصف پر کوئی نقطہ



دیا گیا ہے۔ ج د کو ملاؤ اور
ثابت کرو ا$\widehat{د}$ج بڑا ہے $\widehat{ج}$ سے۔

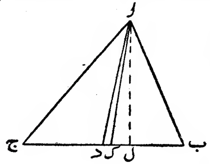


106 اگر ایک مثلّث بالتّمام دُوسرے مثلّث کے اندر واقع ہو تو اندرُونی مثلّث کا احاطہ بیرُونی مثلّث سے کم ہوگا۔



107 اگر کسی مثلّث کے اندر کوئی نقطہ لیا جائے تو تینوں کونوں سے نقطے کے فاصلوں کا مجموعہ مثلّث کے احاطے سے کم ہوگا۔

108 اگر ایک مثلّث کے راسی اضلاع غیر مُساوی ہوں اور اگر راس سے وسطانیہ اور راسی زاویے کے ناصف کھینچے جائیں تو وسطانیہ مثلّث کے بڑے ضلع اور راسی ناصف کے درمیان واقع ہوگا۔



109 مثلّث ا ب ج میں اگر ا د وسطانیہ ہو اک زاویہ $\widehat{ا}$ کا ناصف اور ال ارتفاع تو ثابت کرو اک محلِ وقوع اور طول کے لحاظ سے اد اور ال کے بین بین ہوگا۔

110 ایک مُربّع ا ب ج د کے دو ضلعوں ا ب اور ب ج میں دو نقطے ی اور ف ایسے لیے گئے ہیں کہ

د$\widehat{ی}$ف = د$\widehat{ف}$ی

ثابت کرو کہ $\overline{ای}$ = $\overline{فج}$

دُوسرا حِصّہ

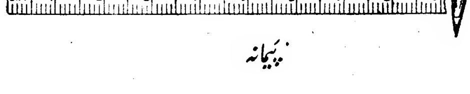
عملِ تشکیل

مسئلہ نمبر 12 سے 43 تک عملی مسائل ہیں - اِن میں شکلیں بنانے کے طریق بتائے گئے ہیں ؛

اِن مسائلِ عملی میں صرف پیمانہ اور پرکار کے اِستعمال کی اِجازت ہوگی - پیمانے کے اِستعمال کی اجازت اصُول موضوعہ نمبر 1 ، 2 پر مبنی ہے - اور پرکار کے اِستعمال کا جواز نمبر 3 پر ؛

مُتوازی خطوط یا زاویے دُوسرے اوزاروں مثلاً گُنیا (سٹ سکوئر) یا زاویہ پیما (پروٹریکٹر) کی مدد سے بہت آسانی سے بنائے جاسکتے ہیں - لیکن اِثباتی ہندسہ میں رواج کے مُطابق صرف پیمانہ اور پرکار کے اِستعمال کی اِجازت دی جاتی ہے ؛

ہدایت : عمل کی تشریح الفاظ میں کرنی ضروری ہے مگر ثبُوت دینے کی ضرورت نہیں جب تک کہ مانگا نہ جائے - وضاحتِ عمل نپے تُلے الفاظ میں ہونی چاہیے - اور جو شکل بنائی جائے وُہ صاف سُتھری ہو ؛

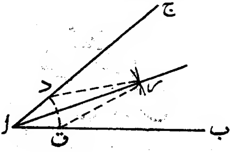


پیمانہ

مسئلہ 21

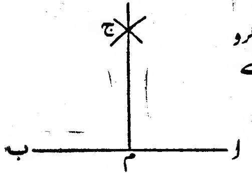
(عملی)

دیئے ہُوئے زاویے کی تنصیف کرنا ؁



معلوم	دیا ہوا زاویہ ب اَ ج ؁
مطلوب	ب اَ ج کی تنصیف کرنا ؁
عمل	(۱) ا کو مرکز مان کر کسی نصف قطر سے دائرے کی قوس کھینچو جو اب کو ق پر اور اج کو ط پر کاٹے ؁ (2) ط اور ق کو مرکز مان کر اور کسی مناسب نصف قطر سے دو قوسیں کھینچو جو ایک دوسری کو نقطہ س پر کاٹیں ؁ (3) س اَ کو ملاؤ یہی زاویہ اَ کا ناصف ہوگا ؁
ثبوت	س ق اور س ط کو ملایا ؁ اب مثلثان ق ا س ، ط ا س میں ؁ ا ق = ا ط (بروئے عمل) ق س = ط س (" ") ا س مشترک ہے ؁ ∴ △ ق ا س ≡ △ ط ا س (ض۔ض۔ض = ض۔ض۔ض) پس ق اَ س = ط اَ س ؁ یعنی س اَ زاویہ ا کی تنصیف کرتا ہے ؁ (فہو المطلوب) نوٹ: اچھی شکل بنانے کے لیے ق س اور ط س کو $\frac{1}{2}$ ق ط سے کچھ ہی زیادہ لینا چاہیے ؁

مشق 21

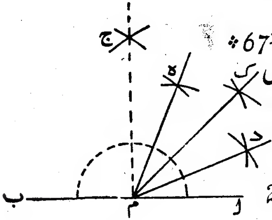


کسی زاویۂ مستقیمہ کی تنصیف کرو۔ فرض کرو ا م ب زاویۂ مستقیمہ ہے م ا کو م ب کے برابر کاٹو ا اور ب کو مرکز مان کر کسی بھی نصف قطر سے دو قوسیں کھینچو جو ایک دوسرے کو ج پر قطع کریں۔

ج کو م سے ملاؤ اور ثابت کرو ج م ا = ج م ب = 90°

مندرجۂ ذیل زاویے کھینچو:—

(1) 45° (2) 22½° (3) 67½° ٭

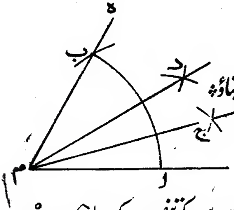


[نمبر 1 کی طرح زاویہ قائمہ بناؤ۔ اس ک کی تنصیف کرو اور جو دو زاویے بنیں ان کی پھر تنصیف کرو جیسا شکل میں دکھایا ہے۔ اب ا م ک = 45°، ا م د = 22½°
ا م ہ 67½°]

مندرجۂ ذیل زاویے بناؤ:—

(1) 112½° (2) 135° (3) 157½°

(1) 60° (2) 30° (3) 15° کے زاویے بناؤ٭



فرض کرو مطلوبہ زاویوں کا ایک بازو م ا ہے م اور ا کو مرکز مان کر م ا کی دوری سے دو قوسیں کھینچو جو نقطہ ب پر ملیں

ب م کو ملاؤ ا م ب = 60° اب م د سے اس کی تنصیف کرو ا م د = 30°

پھر م ج سے ا م د کی تنصیف کرو ا م ج = 15°

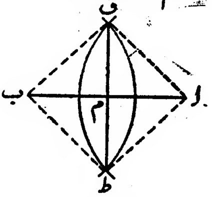
(1) 75° (2) 105° (3) 120° (4) 150° (5) 105° کے زاویے بناؤ٭

کسی مثلث کے قاعدے پر ایسا نقطہ معلوم کرو جس سے دونوں ضلعوں پر کے عمود برابر ہوں٭

مسئلہ 22

(عملی)

دیے ہوئے خطِ مستقیم کی تنصیف کرنا ؎



معلوم	دیا ہُوا خطِ مستقیم اب ؎
مطلوب	اب کو دو برابر حصّوں میں تقسیم کرو ؎
عمل	(1) ا اور ب کو مرکز مان کر کسی مناسب نصف قطر سے دو قوسیں کھینچو جو ایک دُوسری کو نقاط ق، ط پر کاٹیں ؎ (2) ق ط کو ملاؤ اگر ق ط، اب کو نقطہ م پر کاٹے تو ام = م ب
ثبوت	اق، ب ق، ط ا، ط ب کو ملاؤ ؎ △ن ق ا ط، ق ب ط میں ق ا = ق ب (بروئے عمل) ط ا = ط ب (〃) ق ط مشترک ہے ∴ △ ق ا ط ≡ △ ق ب ط اور ا ق ط = ب ق ط (ض-ض-ض = ض-ض-ض) پھر △ن ا ق م، ب ق م میں ق ا = ق ب (بروئے عمل) ق م مشترک ہے ا ق م = ب ق م (بروئے ثبوت) ∴ △ ا ق م ≡ △ ق ب م (ض-ض-ز = ض-ض) اور ا م = ب م (فہو المطلوب)

نوٹ: ق م کو خط اب کا عمودی ناصف کہتے ہیں ؎

مشق 22

1 ایک خط 3.5 انچ لمبا لو اور 4.2 انچ کے نصف قطر لے کر اس کی تنصیف کرو۔

2 ایک خط 6.4 سم لو اور 4 سم نصف قطر کی قوسیں لگا کر اس کی تنصیف کرو۔ عمودی ناصف کی لمبائی ناپو۔

3 ایک خطِ مستقیم کو چار برابر حصوں میں تقسیم کرو۔

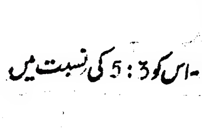
4 ایک خطِ مستقیم کو دو حصوں میں اس طرح تقسیم کرو کہ ایک حصہ دوسرے حصے کا سات گنا ہو۔

5 مسئلہ 22 کی شکل میں ثابت کرو کہ اب خط ق ط کا عمودی ناصف ہے۔

6 ثابت کرو ق ط پر کا ہر نقطہ ا اور ب سے مساوی فاصلے پر ہے۔

7 ایک بڑا مثلث لو اور اس کے اضلاع کے عمودی ناصف کھینچو (دیکھو تینوں ناصف ہم نقطہ ہوں گے)

8 ایک بڑا مثلث لو اور اس کے تینوں وسطانیے کھینچو۔ (دیکھو تینوں وسطانیے ہم نقطہ ہوں گے)



9 △ ا ب ج کے قاعدے میں ایسا نقطہ د معلوم کرو کہ

اد = $\frac{1}{2}$ (اب + اج)

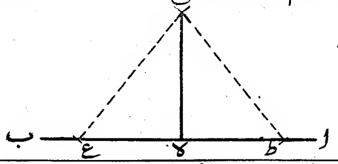
10 ثابت کرو کہ دیے ہوئے خطِ مستقیم کی تنصیف صرف ایک ہی نقطے پر ہو سکتی ہے۔

11 ایک خطِ مستقیم 6.4 سم لمبا ہے۔ اس کو 3 : 5 کی نسبت میں تقسیم کرو۔

مسئلہ 23

(عملی)

کسی خطِ مستقیم کے کسی خاص نقطے سے اُسی پر عمود کھینچنا



معلوم	خطِ مستقیم اب جس میں نقطہ لا دیا ہُوا ہے ؛
مطلوب	نقطہ لا سے اب پر عمود کھینچنا ؛
عمل	(1) لا کو مرکز مان کر کسی نصف قطر سے قوس لگاؤ جو اب کو ط اور ع پر کاٹے۔ پس طلا = علا ؛ (2) ط، ع کو بالترتیب مرکز مان کر کسی نصف قطر سے جو طلا سے بڑا ہو دو قوسیں لگاؤ جو ایک دوسری کو نقطہ ف پر کاٹیں ؛ (3) فلا کو ملاؤ یہی مطلوبہ عمود ہوگا ؛

ثبوت

فط اور فع کو ملاؤ

∵ △ طلاف، علاف میں

طلا = علا (بروئے عمل)

طف = عف (〃)

فلا مشترک ہے

∴ △ طلاف ≡ △ علاف

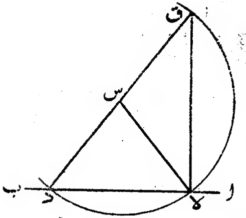
(ض-ض-ض = ض-ض-ض)

پس طلاف = علاف

مگر یہ خط کے ایک ہی طرف متّصلہ زاویے ہیں۔ اس لیے ہر دو قائمہ ہیں

پس فلا عمود ہے اب پر۔

(فھو المطلوب)



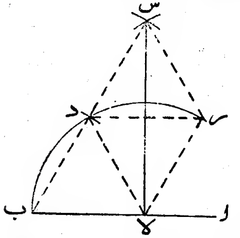
دُوسری ترکیب: اب سے باہر کوئی نقطہ س لو س کو مرکز مان کر س لا کی دُوری پر دائرہ کھینچو جو اب کو د پر کاٹے د س کو ملاؤ۔ اور اس کو بڑھاؤ یہاں تک کے دائرے کے محیط سے نقطہ ق پر مل جائے۔ ق لا کو ملاؤ۔ یہی مطلوبہ عمود ہوگا۔

ثبوت: س د̂ لا = س لا̂ د اور س لا̂ ق = س ق̂ لا

پس ق لا̂ د = د̂ + ق̂

مگر ق لا̂ د + د̂ + ق̂ = 180°

∴ ق لا̂ د = 90°



تیسری ترکیب: لا کو مرکز مان کر کسی بھی نصف قطر سے دائرہ کھینچو جو اب کو ب پر ملے۔ ب کو مرکز مان کر اُسی نصف قطر سے قوس کھینچو۔ جو دائرے کو د پر کاٹے پھر د کو مرکز مان کر اُسی نصف قطر سے قوس کھینچو۔ جو دائرے کو ر پر کاٹے د اور ر کو مرکز مان کر ایک ہی نصف قطر سے قوسیں کھینچو جو ایک دوسری کو س پر کاٹیں۔ س لا کو ملاؤ۔ یہی عمود ہوگا۔

ثبوت: د لا̂ س = ر لا̂ س = 30° ، ب لا̂ د = 60° ∴ ب لا̂ س = 90°

تیسری ترکیب اُس وقت زیادہ مفید ہوگی جب دیا ہوا نقطہ خط کا سرا ہو یا سرے کے قریب واقع ہو۔

مشق 23

1 کوئی زاویہ حادّہ اور اس کا تکمیلی زاویہ بناؤ۔

2 ایک قائم الزّاویہ مثلّث بناؤ۔ جس کے اضلاع 2 اور 3 سم ہوں۔

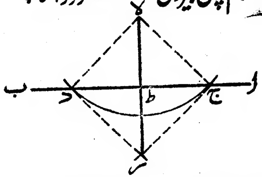
3 دیے ہوئے خط اب پر ایک متساوی السّاقین مثلّث بناؤ جس کا زاویہ ب قائمہ ہو۔

4 ایک مربع شکل بناؤ جس کا ضلع 1.2 انچ ہو۔

مسئلہ 24

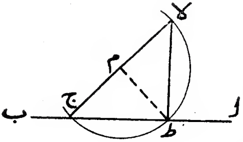
(عملی)

کسی خطِ مستقیم پر کسی بیرونی نقطے سے عمود ڈالنا ؏



معلوم	خطِ مستقیم اب جس کے باہر دیا ہؤا نقطہ لا ہے ؏
مطلوب	لا سے اب پر عمود ڈالنا ؏
عمل	(1) لا کو مرکز مان کر کسی مناسب نصف قطر سے ایک قوس کھینچو۔ جو اب کو نقاط ج ، د پر کاٹے ؏ (2) ج ، د کو بالترتیب مرکز مان کر کسی نصف قطر سے دو قوسیں کھینچو جو ایک دوسری کو س پر کاٹیں ؏ (3) لا س کو ملاؤ جو اب کو ط پر کاٹے لا ط مطلوبہ عمود ہوگا ؏
ثبوت	لاج ، لاد ، س ج ، س د کو ملاؤ ؏ △ن ج لا س اور د لا س میں ج لا = لا د (بروئے عمل) ج س = د س (〃) لا س مشترک ∴ △ ج لا س ≡ △ د لا س (ض ـ ض ـ ض = ض ـ ض ـ ض) پس ج لا س = د لا س پھر △ن ج لا ط ، د لا ط میں ج لا = د لا ، ج لا ط = د لا ط اور لا ط مشترک ہے ∴ △ ج لا ط ≡ △ د لا ط [ض ـ ز ـ ض = ض ـ ز ـ ض] پس لا ط ج = لا ط د لیکن یہ خط کے ایک ہی طرف متصلہ زاویے ہیں پس ان میں سے ہر ایک قائمہ ہے ∴ لا ط عمود ہے اب پر (فہو المطلوب)

دُوسری ترکیب :-



عمل: اب میں کوئی نقطہ ج لو، لا ج کو ملاؤ اور اس کی تنصیف نقطہ م پر کرو م کو مرکز مان کر م لا نصف قطر سے نصف دائرہ کھینچو جو اب کو ط پر ملے۔ لا ط کو ملاؤ یہی عمود ہوگا۔

ثبوت: م لا = م ط = م ج

∴ م ط لا = لا اور م ط ج = ج

پس لا ط ج = لا + ج مگر لا + ط + ج = 180° ∴ لا ط ج = 90°

مشق 24

1 کوئی حادۃُ الزّاویہ مثلّث لو اور ہر زاویے کے راس سے مُقابل کے ضلعے پر عمُود کھینچو (دیکھو تینوں عمُود ہم نقطہ ہوں گے)

2 کوئی (۱) منفرجتُہ الزّاویہ (2) قائم الزّاویہ مثلّث لو اور سوال نمبر ۱ کی طرح عمل کرو ۞

3 80° کا زاویہ لے کر اُس کی تنصیف کرو۔ ناصف کے کسی نُقطے سے زاویے کے دونوں بازوؤں پر عمُود گراؤ اور ثابت کرو یہ عمُود باہم برابر ہیں ۞

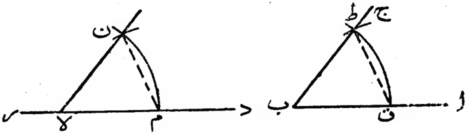
4 کوئی حادۃُ الزّاویا مثلّث ا ب ج لو۔ اب اور اج کے عمُودی ناصف کھینچو، جو نقطہ م پر ملیں۔ نقطہ م سے ب ج پر م د عمُود کھینچو۔ اور ثابت کرو ب د = ج د ۞

5 دو خطوطِ مُستقیم م ا، م ب کھینچو۔ جن کے درمیان 60° کا زاویہ ہو م ا = 1.6" اور م ب = 2" لو۔ اب کو ملاؤ اور م سے اس پر عمُود کھینچو ۞

مسئلہ 25

(عملی)

ایک خطِ مستقیم کے کسی نقطے پر ایک زاویہ بنانا جو دیے ہوئے زاویے کے برابر ہو۔



معلوم	دیا ہؤا زاویہ ا ب ج، دیا ہؤا خط د ر جس پر لا ایک دیا ہؤا نقطہ ہے۔
مطلوب	لا پر ایک زاویہ ا ب ج کے برابر بنانا۔
عمل	(1) ب کو مرکز مان کر کسی نصف قطر سے ایک قوس کھینچو جو ب ا، ب ج کو نقاط ق اور ط پر کاٹے۔ (2) ق ط کو ملاؤ۔ (3) لا کو مرکز مان کر اُسی نصف قطر سے ایک قوس م ن کھینچو جو د ر کو م پر ملے۔ (4) م کو مرکز مان کر اور نصف قطر ق ط کے برابر لے کر قوس کھینچو جو پہلے قوس کو ن پر کاٹے۔ (5) ن لا کو ملاؤ تو م لا ن مطلوبہ زاویہ ہوگا۔
ثبوت	ن م کو ملاؤ۔ △ م لا ن، ق ب ط میں لا م = ب ق لا ن = ب ط م ن = ق ط ∴ △ م لا ن ≡ ق ب ط (ض-ض-ض = ض-ض-ض) لہٰذا لا = ب (فہوالمطلوب)

مشق 25

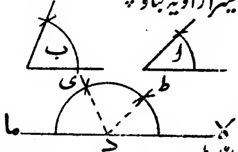
1 ایک منفرجہ زاویہ لو اور اُس کے برابر زاویہ بناؤ ؎

2 ایک حادّہ زاویہ لو اور اُسے دُگنا کرو ؎

3 ایک حادّہ زاویہ لو اور ایک ایسا زاویہ بناؤ جو اُس کے تکمیلی زاویے سے د

4 ایک منفرجہ زاویہ لو اور ایک ایسا زاویہ بناؤ جو اُس کے تتمّہ زاویے سے دُگنا ہو ؎

5 مثلّث کے دو زاویے دیئے ہوئے ہیں۔ تیسرا زاویہ بناؤ ؎

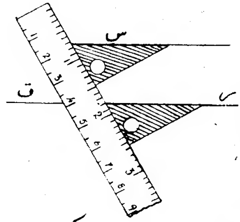


[خط لا، ما پر لا ذ ط کو اُ کے برابر اور ط د ی کو ب کے برابر بناؤ۔ اب باقی زاویہ ی د ما مطلوبہ زاویہ ہوگا]

6 مثلّث کے قاعدے میں (خواہ بڑھانا پڑے) ایک ایسا نقطہ معلوم کرو جو اس اور ایک اور کونے سے برابر کے فاصلے پر ہو ؎

مُتوازی خطُوط کھینچنے کی ترکیب

طُلبہ پچھلی جماعتوں میں یہ سیکھ چکے ہیں کہ کسی دیے ہُوئے خطِ مُستقیم کے مُتوازی کوئی خط گُنیا (سٹ سکوئر) کی مدد سے کس طرح کھینچا جاتا ہے۔

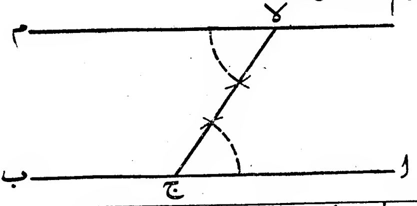


فرض کرو نقطہ س سے ایک خط ر ق کے ∥ کھینچا ہے۔ گُنیا کا سب سے بڑا کنارا ر ق کے ساتھ اور دُوسرا کنارا مسطر کے ساتھ رکھو۔ اب مسطر کو دبائے رکھو اور گُنیا کو اس کے ساتھ اس طرح سرکاؤ کہ اُس کا کنارا مسطر کے ساتھ رہے یہاں تک کہ سب سے بڑا کنارا "س" پر آجائے اب سب سے بڑے کنارے کے ساتھ خط کھینچو یہی مطلوبہ خط ہوگا جو "س" میں سے گزرے گا اور ر ق کا مُتوازی ہوگا ؎

مسئلہ 26

(عملی)

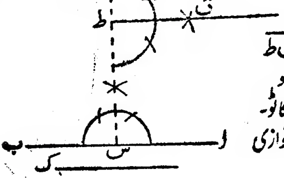
دیے ہوئے نُقطے سے ایک خطِ مستقیم کھینچنا جو دِیے ہُوئے خطِ مُستقیم کے متوازی ہو۔



معلوم	دیا ہُوا نُقطہ لا اور دیا ہُوا خط $\overline{\text{اب}}$ ۔
مطلوب	لا سے ایک ایسا خط کھینچنا ہے جو اب کے مُتوازی ہو ۔
عمل	(1) $\overline{\text{اب}}$ میں کوئی نُقطہ ج لو ۔ (2) $\overline{\text{لاج}}$ کو ملاؤ ۔ (3) لا پر زاویہ ج لا م زاویہ لا ج ا کے برابر بناؤ ۔ لام مطلُوبہ خط ہوگا ۔
ثبوت	م لا ج = لا ج ا (بروئے عمل) مگر یہ مُتبادلہ زاویے ہیں ۔ اِس لیے م لا مُتوازی ہے $\overline{\text{اب}}$ کا ۔ (فھوالمطلوب)

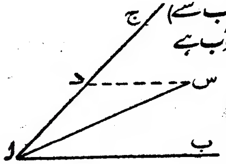
مشق 26

1 دیے ہوئے خطِ مستقیم کے متوازی دیے ہوئے فاصلے پر ایک خط مستقیم کھینچنا۔



عمل: اب پر کوئی نقطہ س لو۔ س ط خط اب پر عمود کھینچو۔ س ط کو دیے ہوئے فاصلہ ک کے برابر کاٹو۔ ط میں سے ایک خط اب کے متوازی کھینچو۔ یہی خط مطلوبہ ہوگا۔

2 زاویے کی تنصیف (دوسری ترکیب سے)



فرض کرو زاویہ ب ا ج کی تنصیف مطلوب ہے

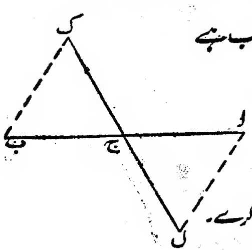
عمل (۱) اج پر کوئی نقطہ د لو

(۲) د سے د س خط اب کے متوازی کھینچو۔

(3) د س کو د ا کے برابر کاٹو۔

(4) س ا کو ملاؤ۔ یہی مطلوبہ ناصف ہوگا (ثبوت وجہ بتا کر دو)

3 دیے ہوئے خطِ مستقیم کی تنصیف (دوسری ترکیب سے)



فرض کرو خط اب کی تنصیف مطلوب ہے

عمل (۱) خط ب ک کھینچو جو اب کے ساتھ کوئی زاویہ بنائے

(۲) خط ال دوسری طرف ب ک کے متوازی کھینچو۔

(3) ال = ب ک کاٹو

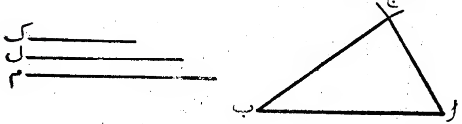
ک ل کو ملاؤ جو اب کو ج پر قطع کرے۔

(4) ج مطلوبہ نقطۂ تنصیف ہوگا۔

مسئلہ 27

(عملی)

ایسا مثلث بنانا جس کے تینوں اضلاع کی لمبائی معلوم ہو ؏



معلوم	تین لمبائیاں ک، ل، م ؏
مطلوب	مثلث بنانا جس کے اضلاع طول میں ک، ل، م کے برابر ہوں ؏
عمل	(1) کوئی خطِ مستقیم کھینچو اور اس پر حصہ اب برابر م کے کاٹو۔ (2) ا کو مرکز مان کر ک کی دوری سے ایک قوس کھینچو۔ (3) ب کو مرکز مان کر ل کی دوری سے ایک اور قوس کھینچو جو پہلی قوس کو ج پر کاٹے۔ (4) ج ا اور ج ب کو ملاؤ۔ ا ب ج مطلوبہ مثلث ہے۔
ثبوت	ظاہر ہے۔

نوٹ (1) اگر دی ہوئی دو لمبائیاں مل کر تیسری لمبائی کے برابر یا اس سے کم ہوں تو عمل ناممکن ہوگا ؏

(2) قوسیں جو ایک دوسری کو نقطہ ج پر کاٹتی ہیں اب کی دوسری طرف بھی ایک دوسری کو کاٹیں گی۔ اس صورت میں اس عمل سے اب کے دونوں طرف دو مثلث بن سکتے ہیں ؏

مشق 27

1 مندرجۂ ذیل مثلّث بناؤ:۔

(i) اب = 1·5″، ب ج = 1·4″، ج ا = 1·3″

(ii) اب = 1·7″، ب ج = 1·5″، ج ا = 1·6″

(iii) اب = 3 سم، ب ج = 3·5 سم، ج ا = 4 سم

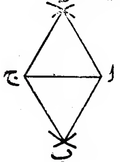
2 مندرجۂ ذیل مثلّث بنانے کی کوشش کرو:۔

(i) اب = 3″، ب ج = 1·5″، ج ا = 1·2″

(ii) اب = 3·5″، ب ج = 1″، ج ا = 2″

(iii) اب = 5 سم، ب ج = 3 سم، ج ا = 2 سم

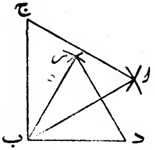
3 دیے ہوئے خطِ مستقیم اب پر متساوی الاضلاع مثلّث بناؤ۔



4 ایک ایسا معیّن بناؤ جس کا ایک وتر ضلعے کے برابر ہو۔
[اب کے دونوں طرف متساوی الاضلاع مثلّث بناؤ]

5 دیے ہوئے خط پر ایک متساوی السّاقین مثلّث بناؤ۔ جس کا ہر ضلع قاعدے سے دُگنا ہو۔

6 ایک مثلّث بناؤ جس کے اضلاع بالتّرتیب 3·7، 2·5، 4·2 انچ ہوں۔
اس مثلّث کے وسطانیے کھینچو۔



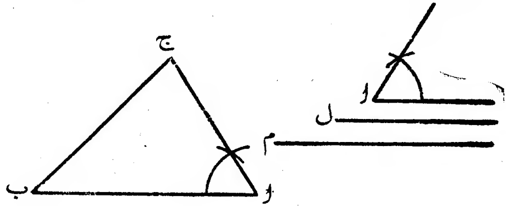
7 ایک قائمہ زاویے کو تین مساوی حصّوں میں تقسیم کرو۔

8 اب ایک خطِ مستقیم 2″ طول میں لو۔ اس کے ایک طرف اب ج مثلّث متساوی الاضلاع بناؤ اور دوسری طرف ایک مثلّث متساوی السّاقین اب د بناؤ۔ جس کا ضلع 3″ ہو۔ ج د ناپو۔

مسئلہ 28

(عملی)

ایسا مثلث بنانا جس کے دو ضلعے اور اُن کا درمیانی زاویہ معلوم ہو:



معلوم	ل اور م دو لمبائیاں اور زاویہ اؔ ؛
مطلوب	مثلث بنانا جس کے دو ضلعے ل اور م کے برابر ہوں اور درمیانی زاویہ ا کے برابر ہو ؛
عمل	(۱) ایک خطِ مستقیم ا ب، م کے برابر کھینچو ؛ (2) زاویہ ب اؔ ج بناؤ جو اؔ کے برابر ہو ؛ (3) اج کو ل کے برابر کاٹو ؛ (4) ب ج کو ملاؤ ؛ ا ب ج مطلوبہ مثلث ہے ؛
ثبوت	ظاہر ہے ؛
	نوٹ: اؔ کے مقابل کے ضلع ب ج کے طول کو طا سے ب کے مقابل کے ضلع ج ا کے طول کو طب سے اور ج کے مقابل کے ضلع ا ب کے طول کو طج سے تعبیر کرتے ہیں ؛

مشق 28

1 مندرجۂ ذیل پیمائشوں کے مثلث بناؤ:۔

(i) ل ا = 1.5″ ، ل ب = 2″ ، ج^ = 60°

(ii) ل ب = 4 سم، ل ج = 6 سم، ا^ = 90°

(iii) ل ج = 4 سم، ل ا = 3.5 سم، ب^ = 120°

2 مثلث کے دو ضلعے بالترتیب 2″ اور 3″ اور درمیانی زاویہ 120° ہے۔ تیسرے ضلعے کی لمبائی ناپو۔

3 ایک قائم الزاویہ متساوی الساقین مثلث بناؤ۔ جس کا ایک مساوی ضلع 2.3 سم ہو۔

4 ایک متساوی الساقین مثلث بناؤ۔ جس کے مساوی زاویوں میں سے ایک $67\frac{1}{2}$ درجے کا ہو اور مساوی ضلعوں میں سے ایک 3″ کا ہو۔

5 ایک ااع جس کے اضلاع کا طول 1.5″ اور 2.5″ اور ایک زاویہ 40° کا ہو۔ وتروں کی لمبائی ناپو اور پیمائش سے ثابت کرو کہ وتروں کا نقطۂ تقاطع اُن کا نقطۂ تنصیف بھی ہے۔

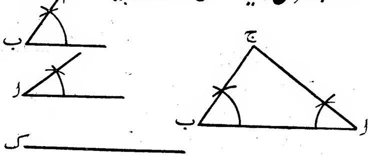
6 ایک قائم الزاویہ مثلث بناؤ۔ جس کے دو اضلاع 3″ اور 4″ ہوں۔ اس طرح مثلث میں جو دو حادہ زاویے بنیں گے۔ اُن میں سے چھوٹے زاویے کی تنصیف کرو اور خطِ تنصیف کی لمبائی ناپو۔

7 اب ج ایک مثلث بناؤ۔ جس کے دو ضلعے اب ، ب ج بالترتیب 3.2 سم اور 4.9 سم ہوں اور اُن کا درمیانی زاویہ ب 75° کا ہو۔ اِس کے سب سے بڑے زاویے کی تنصیف کرو اور سب سے چھوٹے ضلعے پر مقابل کے کونے سے عمود گراکر اُس کی پیمائش کرو۔

مسئلہ 29

(عملی)

مثلث بنانا جس کا ایک ضلع اور دو زاویے معلوم ہوں ÷



معلوم	زاویہ اَ ، بَ اور ضلع اب کی لمبائی ک ÷
مطلوب	مثلث بنانا جس کے مذکورۂ بالا اجزا ہوں ÷
عمل	(۱) خط اب کھینچو جو طول میں ک کے برابر ہو ÷ (۲) نقطہ ا پر زاویہ ب اج = اَ بناؤ ÷ (۳) نقطہ ب پر زاویہ ا ب ج = بَ بناؤ ÷ ا ب ج مطلوبہ مثلث ہوگا ÷ (فھوالمطلوب)
ثبوت	ظاہر ہے ÷

نوٹ: مثلث کے تینوں زاویوں کا مجموعہ 180° ہے اگر دو زاویے معلوم ہوں تو تیسرا زاویہ فوراً معلوم ہو سکتا ہے ۔ لہٰذا ہر صورت میں دیے ہوئے ضلعوں کے سروں کے زاویے معلوم ہوں گے اور مندرجۂ بالا عمل کام دے سکے گا ÷

مشق 29

1 6 سم لمبے قاعدے پر ایک مثلّث بناؤ۔ جس کے قاعدے کے زاویے 45° اور 60° ہوں ؎

2 مندرجۂ ذیل پیمائشوں سے مثلّث بناؤ:۔

(ا)	اب = 7·5 سم	أ̂ = 60°	ج̂ = 75°
(ب)	اب = 2 〃	أ̂ = 40°	ج̂ = 50°
(ج)	ب ج = 6·8 سم	أ̂ = 45°	ب̂ = 90°
(د)	ب ج = 2 〃	أ̂ = 50°	ب̂ = 45°
(ﮦ)	ب ا = 8·2 سم	ب̂ = 105°	ج̂ = 30°
(و)	ج ا = 2·7 〃	ج̂ = 60°	ب̂ = 45°

3 وتر اور ایک حادّہ زاویہ دیا ہو تو قائم الزّاویہ مثلّث بناؤ ؎

4 ایک خطِ مُستقیم اب 4·6 سم لمبا لو اور اُس پر مثلّث اب ج بناؤ جس میں زاویہ اب ج زاویہ ب ا ج سے تگنا ہو۔ اور ب ج ا زاویہ ب ا ج سے دُگنا ہو۔ باقی اضلاع کی پیمائش کرو ؎

5 3·7 〃 لمبے قاعدے پر ایک متساوی السّاقین مثلّث بناؤ جس کے قاعدے کا ہر زاویہ راسی زاویے سے دُگنا ہو ؎

نوٹ: قاعدے کا ہر زاویہ 72° کا ہے۔

(پروٹریکٹر استعمال کرو)

6 2·5 〃 لمبے قاعدے پر متساوی السّاقین مثلّث بناؤ۔ جس کا راسی زاویہ 135° کا ہو ؎

7 متساوی السّاقین مثلّث بناؤ۔ جن میں

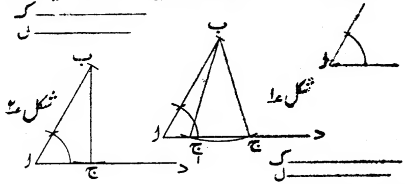
(1) قاعدہ 3·5 سم، راسی زاویہ 45° ہو۔

(2) 〃 1·6 〃، راسی زاویہ 30° ہو ؎

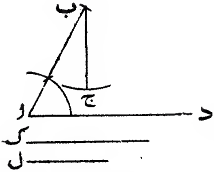
مسئلہ 30

(عملی)

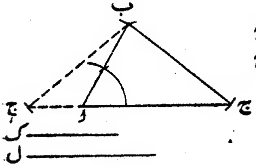
مثلث بنانا جس کے دو ضلعے اور اُن میں سے ایک کے مقابل کا زاویہ معلوم ہو۔



معلوم	دو خط جن کے طول ک اور ل ہیں اور زاویہ $\hat{ا}$
مطلوب	مثلث بنانا جس کے دو ضلعے ک اور ل کے برابر ہوں اور ان میں سے ل کے مقابل کا زاویہ ا کے برابر ہو ۔
عمل	(۱) کوئی خط ا د کھینچو ۔ (2) ا پر زاویہ د $\hat{ا}$ ب = $\hat{ا}$ بناؤ ۔ (3) ا ب کو ک کے برابر کاٹو ۔ (4) ب کو مرکز مان کر ل نصف قطر سے دائرہ کھینچو ۔ مندرجہ ذیل چار صورتیں ہوں گی :- **پہلی صورت :** جب دائرہ ا د کو ج اور ج پر کاٹے (شکل نمبر ۱) ب ج اور ب ج کو ملاؤ ۔ مثلث ا ب ج، مثلث ا ب ج میں دیے ہوئے اجزا سب موجود ہیں۔ اس لیے یہ مطلوبہ مثلث ہیں ۔ **دوسری صورت :** جب دائرہ ا د کو صرف نقطہ ج پر چھو جائے (شکل نمبر 2) ب ج کو ملاؤ۔ یہی مثلث مطلوبہ ہے (جس کا زاویہ ج قائمہ ہے)



تیسری صورت: جب دائرہ نہ تو اد کو کاٹے اور نہ چھوئے تو اس صورت میں مثلث نہیں بن سکے گا۔



چوتھی صورت: جب دائرہ اد کو دو نقطوں ج، ج پر اس طرح کاٹے کہ ج، ا کے دائیں طرف ہو، ب ج ملانے سے صرف ایک مثلث مطلوبہ حاصل ہوگا۔ دوسرے مثلث ا ب ج کا زاویہ ا کے بجائے ا کا تتمہ زاویہ ہے۔ اس صورت میں ل بڑا ہے ک سے۔

مشق 30

1 وتر اور قاعدہ معلوم ہے قائمۃ الزاویہ مثلث بناؤ۔

2 مندرجۂ ذیل پیمائشوں سے مثلث بناؤ (جہاں جہاں ممکن ہو)

(ا) ا = 30°، طا = 2، طج = 5

(ب) طا = 1، طب = 2، ا = 30°

(ج) طا = 2، طج = 3، ج = 60°

(د) طب = 3، طج = 4، ب = 30°

(ہ) طا = 8، طب = 5، ب = 32°

(و) طج = 4، طب = 3، ج = 70°

3 مندرجۂ ذیل پیمائشوں سے مثلث بناؤ (جہاں جہاں ممکن ہو) اور وہ مشتبہ صورتیں بناؤ جن میں دو مثلث بنتے ہیں:-

(ا) طا = 4.7 سم، طج = 1.8 سم، ج = 15°

طا = 2 سم، طب = 9.4 سم، ا = 18°

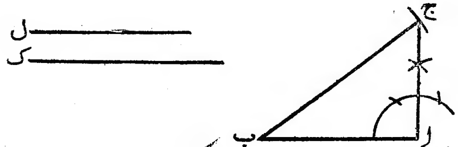
ج = 135°، طب = 4.2 سم، طج = 3.4 سم

4 ایک متساوی الساقین مثلث بناؤ جس کے مساوی اضلاع میں سے ایک ضلع اور قاعدے پر کا ایک زاویہ معلوم ہوں۔

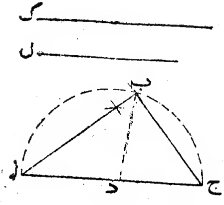
مسئلہ 31

(عملی)

قائم الزّاویہ مثلّث بنانا جس کا وتر اور ایک ضلع معلوم ہوں ۞



معلوم	دو لمبائیاں ک اور ل ۞
مطلوب	قائم الزّاویہ مثلّث بنانا جس کا وتر ک کے برابر اور ضلع ل کے برابر ہو ۞
عمل	(1) ایک خط اب طول میں ل کے برابر لو ۞ (2) اب میں نقطہ ا پر خط اج عموداً کھینچو ۞ (3) ب کو مرکز مان کر ک کی دوری سے قوس کھینچو جو اج کو ج پہ قطع کرے ۞ (4) ج ا کو ملاؤ ۞ △ اب ج قائم الزّاویہ مثلّث ہے ۞
	ظاہر ہے △ اب ج میں وتر = ک ضلع = ل اور زاویہ ا قائمہ ہے ۞



دوسری ترکیب

عمل:- ایک خطِ مستقیم اج، ک کے برابر کھینچو۔ اج کی تنصیف نقطہ د پر کرو۔ د کو مرکز مان کر دا نصف قطر سے دائرہ اب ج کھینچو۔ ا کو مرکز مان کر ل کی دوری سے قوس کھینچو جو دائرہ اب ج کو نقطہ ب پر قطع کرے۔ اب اور ب ج کو ملاؤ۔ اب ج مطلوبہ مثلث ہوگا۔

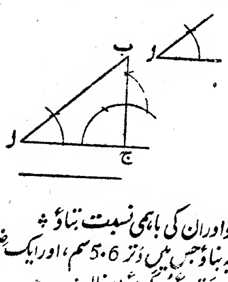
مشق 31

1 مندرجۂ ذیل پیمائشوں سے قائم الزاویہ مثلث بناؤ:—

(1) وتر = 2.5″ ، ضلع = 1.5″
(2) 〃 = 3 سم ، 〃 = 3 سم
(3) 〃 = 6.5 سم ، 〃 = 6 〃
(4) 〃 = 3.25″ ، 〃 = 3″

2 ایک قائم الزاویہ متساوی الساقین مثلث بناؤ جس کا وتر 3″ ہو۔

3 ایک ضلع اور اُس کا متصلہ حادّہ زاویہ معلوم ہو تو قائم الزاویہ مثلث بناؤ۔



4 مستطیل بناؤ۔ جس کا وتر 2.5″ اور ایک ضلع 1″ ہو۔

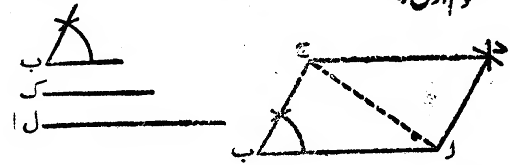
5 قائم الزاویہ مثلث بناؤ۔ جس کا وتر 2.6″ اور ایک ضلع 1.3″ ہو۔ دونوں حادّہ زاویوں کی پیمائش کرو اور ان کی باہمی نسبت بتاؤ۔

6 اب ج ایک مثلث قائم الزاویہ بناؤ جس میں وتر 5.6 سم، اور ایک ضلع ب ج = 3.2 سم، زاویہ قائمہ سے وتر پر عمود گراؤ اور ناپو۔

مسئلہ 32

(عملی)

متوازی الاضلاع بنانا جس کے دو متصلہ ضلعے اور اُن کا درمیانی زاویہ معلوم ہوں ؂



معلوم: دو لمبائیاں ک اور ل اور ب دیا ہوا زاویہ ؂

مطلوب: متوازی الاضلاع بنانا جس کے دو ضلعے ک اور ل کے برابر اور اُن کا درمیانی زاویہ ب کے برابر ہو ؂

عمل:

(1) زاویہ ا ب ج زاویہ ب کے برابر بناؤ ؂
(2) $\overline{\text{ب ج}}$ کو ک کے برابر اور ب ا کو ل کے برابر کاٹو ؂
(3) ج کو مرکز مان کر ل کی دُوری سے قوس کھینچو ؂
(4) ا کو مرکز مان کر ک کی دُوری سے قوس کھینچو۔ جو پہلی قوس کو د پر کاٹے
(5) $\overline{\text{ج د}}$ اور $\overline{\text{ا د}}$ کو ملاؤ۔ ا ب ج د مطلوبہ متوازی الاضلاع ہوگا ؂

ثبوت:

ا ج کو ملاؤ ؂

؂ $\overline{\text{ا ب}}$ = $\overline{\text{د ج}}$ ، $\overline{\text{ا د}}$ = $\overline{\text{ب ج}}$ اور $\overline{\text{ا ج}}$ مشترک ہے ؂

∴ △ ا ب ج ≡ △ ا ج د

پس ∠ ا ج ب = ∠ ج ا د اور ∠ ب ا ج = ∠ ا ج د

یہ متبادلہ زاویے ہیں ∴ $\overline{\text{د ج}}$ ∥ $\overline{\text{ا ب}}$ اور $\overline{\text{ب ج}}$ ∥ $\overline{\text{ا د}}$

پس ا ب ج د متوازی الاضلاع ہے ؂

(فہوالمطلوب)

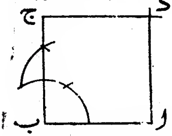
مشق 32

1 متوازی الاضلاع اب ج د بناؤ جن میں ۔

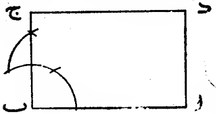
(ا) $\overline{\text{اب}}$ = 2.5 گ ، $\overline{\text{اد}}$ = 1.5 گ ، $\hat{\text{ا}}$ = 35°

(ب) $\overline{\text{اب}}$ = 5.8 سم ، $\overline{\text{اد}}$ = 4.6 سم ، $\hat{\text{ا}}$ = 120°

(ج) $\overline{\text{اب}}$ = 2 گ ، $\overline{\text{اد}}$ = 1.2 گ ، $\hat{\text{ا}}$ = 45°



2 دیے ہوئے خطِ مستقیم پر مربّع بناؤ۔



3 دیے ہوئے اضلاع کا مستطیل بناؤ۔

4 ایک زاویہ اور احاطہ دیا ہوا ہے۔ معیّن بناؤ۔

[معیّن کے سب اضلاع برابر ہوتے ہیں اور آمنے سامنے کے زاویے مساوی ہوتے ہیں]

5 دونوں وتر معلوم ہیں معیّن بناؤ۔

[ہر معیّن کے وتر ایک دوسرے کی قائمے زاویوں پر تنصیف کرتے ہیں]

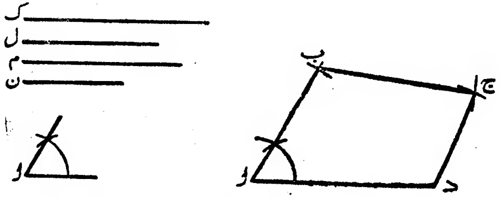
6 اب ج د ایک متوازی الاضلاع بناؤ۔ جس کا $\overline{\text{اب}}$ ضلع 2 گ ، وتر $\overline{\text{ب د}}$ 2.5 گ اور زاویہ ب $22\frac{1}{2}$° ہو۔ وتر اج کو ناپو۔

7 اب ج د ایک متوازی الاضلاع بناؤ۔ جس کا ضلع $\overline{\text{اب}}$ = 4 سم وتر ب د = 5 سم ، ب اد = 120° ہو۔ وتر اج کی پیمائش کرو۔

مسئلہ 33

(عملی)

چار ضلعی شکل بنانا جس کے چاروں اضلاع اور ایک زاویہ معلوم ہوں۔



معلوم	ک، ل، م، ن چار لمبائیاں اور دیا ہوا زاویہ وٓ
مطلوب	چار ضلعی شکل بنانا جس کے اضلاع ک، ل، م، ن کے برابر اور پہلے اور چوتھے اضلاع کا درمیانی زاویہ وٓ ہو۔
عمل	(1) اد کو ک کے برابر لو۔ (2) زاویہ د اب کو وٓ کے برابر بناؤ۔ (3) اب کو ل کے برابر کاٹو۔ (4) د کو مرکز مان کر ن کی دوری سے قوس کھینچو۔ (5) ب کو مرکز مان کر م کی دوری سے قوس کھینچو۔ جو پہلی قوس کو ج پر کاٹے۔ (6) ب ج اور ج د کو ملاؤ۔ اب ج د مطلوبہ ذوار بعۃ الاضلاع ہوگا۔
ثبوت	ظاہر ہے۔ (وھو المطلوب)

مشق 33

1 اجزائے ذیل سے چوکور اب ج د بناؤ:-
اب = 2.5 گ، ب ج = 3 گ، اد = 2 گ ب̂ = 90°،
ج د = 3.5 گ خط اج کو ناپو۔

2 اب ج د چوکور بناؤ۔ جس میں اب = 2 گ، ب ج = 1.5 گ، ج د = 3 گ،
دا = 2.5 گ اور اب̂ ج = 160°۔

3 اب ج د چوکور بناؤ۔ جس میں اب = 1 گ، ب ج = 1.5 گ،
ج د = 1.6 گ ب̂ = 135°، ا̂ = 90°، اد کی لمبائی ناپو۔

4 ایک چوکور قطعہ اراضی ک ل م ن کا نقشہ کھینچو۔ جس میں ک ل = 80 گز،
ل م = 150 گز، م ن = 120 گز ن ک = 114 گز اور ک ل̂ م = 90°
نقشے میں ایک سنگ میل کا نشان لگاؤ جو گوشہ ن سے 120 گز اور ک ل سے
50 گز کے فاصلے پر ہے۔ اس کا فاصلہ ک سے معلوم کرو۔

5 ذوزنقہ بناؤ۔ جس کے متوازی اضلاع 3 سم اور 5 سم ہوں۔ تیسرا ضلع جو
متوازی اضلاع میں سے چھوٹے ضلعے کے ساتھ 120° کا زاویہ بنا۔

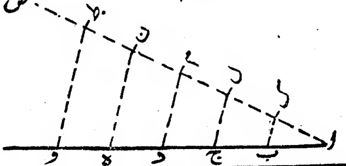
6 اب ج د ایک چوکور بناؤ۔ جس میں اب = 2.5 گ، ب ج = 2 گ،
ج د = 2.8 گ اور دا = 2.3 گ اور زاویہ اب ج = 120°

7 وتر اج معلوم ہو تو مربع اب ج د بناؤ
(وتر کا عمودی ناصف ب م د کھینچ کر ب م = م د = ½ اج کاٹو اور
کونے ملاؤ)

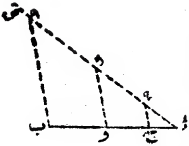
مسئلہ 34

(عملی)

دیے ہوئے خطِ مستقیم کو چند برابر حصوں میں تقسیم کرنا ۔



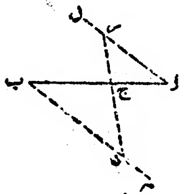
معلوم	خطِ مستقیم ا و ۔
مطلوب	ا و کو چند برابر حصوں میں تقسیم کرنا (فرض کرو 5 حصوں میں تقسیم کرنا ہے)
عمل	(1) ا و سے کوئی زاویہ بناتا ہوا خط ا ص کھینچو ۔ (2) ا ص پر کسی مناسب لمبائی کے پانچ مساوی فاصلے ا ک، ک ل، ل م، م ن، ن ط کاٹو ۔ (3) ط و کو ملاؤ ۔ (4) ک، ل، م، ن سے و ط کے متوازی خطوط کھینچو۔ جو ا و کو ب، ج، د، ہ پر ملیں ۔
ثبوت	∵ ک ب، ل ج، م د، ن ہ، ط و متوازی خطوط خط ا ص کو برابر حصوں میں تقسیم کرتے ہیں ۔ ∴ بروئے مسئلہ 20 وہ خط ا و کو بھی برابر حصوں میں تقسیم کرتے ہیں ۔ پس ا ب، ب ج، ج د، د ہ، ہ و خط ا و کے مطلوبہ مساوی حصے ہیں ۔ (فھو المطلوب)



نوٹ: اگر اب کو ایسے حصوں میں تقسیم کرنا ہو۔ جن کی باہمی
نسبت 2 : 3 : 4 کی ہو تو اص پر 9 مساوی حصے
لو اور نمبر 2 اور 5 سے 9 ب کے متوازی خطوط کھینچو۔

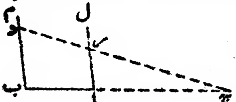
دیے ہوئے خطِ مستقیم کی داخلی اور خارجی تقسیم:

1 ایک دیے ہوئے خطِ مستقیم اب کو 2 : 3 کی نسبت میں داخلی طور پر تقسیم کرو۔

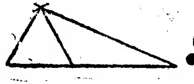


اب کے ساتھ کوئی مناسب حادہ زاویہ بناتا ہوا خط ال کھینچو۔ ال کے متوازی بم کھینچو جو اب کے دوسری طرف واقع ہو۔
ال میں سے اس = 2 اکائیاں اور بم میں سے بد = 3 اکائیاں کاٹو
س د کو ملاؤ۔ جو اب کو نقطہ ج پر قطع کرے۔ تب اب نقطہ ج پر 2 : 3 کی نسبت میں داخلی طور پر تقسیم ہوگا۔
پس اج : ج ب = 2 : 3۔

2 ایک دیے ہوئے خطِ مستقیم اب کو 2 : 3 کی نسبت میں خارجی طور پر تقسیم کرو۔



اب کے ساتھ کوئی سا حادہ زاویہ بناتا ہوا خط ال کھینچو۔
نقطہ ب سے ال کے متوازی اُسی سمت میں بم کھینچو۔ ال میں سے اس = 2 اکائیاں اور بم میں سے ب د = 3 اکائیاں قطع کرو۔ د س کو ملاؤ اور بڑھاؤ یہاں تک کہ وہ ب اخارج شدہ سے ج پر ملے۔ تب نقطہ ج پر اب 2 : 3 کی نسبت میں خارجی طور پر تقسیم ہوگا۔
پس اج : ب ج = 2 : 3



بطرزِ دیگر: ا کو مرکز مان کر 2 اکائیوں کی دوری پر ایک قوس لگاؤ۔ پھر ب کو

مرکز مان کر 3 اکائیوں کی دوری پر قوس کھینچو۔ جو پہلی قوس کو نقطہ د پر قطع کرے
دا ، دب کو ملاؤ۔
△ داب کے زاویہ د کے داخلی اور خارجی ناصف دل ، دم کھینچو۔
نقاط ل ، م پر خط اب داخلی اور خارجی طور سے مطلوبہ نسبت میں تقسیم ہو جائے گا۔

مشق 34

1 ایک خط 7.4 لمبا کھینچو اور ہندسی ترکیب سے اسے 5 مساوی حصوں میں تقسیم کرو۔

2 ایک خط اب 3.3 لمبا لو اور اسے نقطہ ج پر اس طرح تقسیم کرو کہ
اج : جب = 3 : 8

3 ایک خط 2.4 لمبا لو اور اسے 4 : 5 کی نسبت میں تقسیم کرو۔

4 ایک 5.4 لمبے خط کو چھ مساوی حصوں میں تقسیم کرو۔ ان میں سے ایک حصے پر ایک مثلث بناؤ۔ جس کے ضلع 2 : 3 : 4 کی نسبت میں ہوں۔

5 ایک خط 6.3 لمبا لو اور اسے تین حصوں میں 3 : 4 : 2 کی نسبت میں تقسیم کرو اور ہر حصے کو ناپو۔

6 ایک خط کو جو 5.2 لمبا ہے۔ داخلی طور پر 3 : 2 کی نسبت میں تقسیم کرو۔

7 خط اب 3 لمبا لو اور اسے خارجی طور پر 2 : 1 کی نسبت میں تقسیم کرو۔

8 5.3 سم لمبا خط کھینچو اور اسے خارجی طور پر 3 : 2 " " "

9 ایک خط اب 6.5 سم لمبا لو۔ اسے خارجی اور داخلی طور پر 3 : 4 کی نسبت میں تقسیم کرو۔

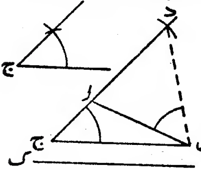
ہندسی یں

اب تک ہم مسائلِ اثباتی و عملی کو اسلوبِ ترکیبی سے حل کرتے رہے ہیں یعنی امورِ معلومہ سے ہم بذریعۂ دلائل نتائج غیر معلومہ اخذ کرتے رہے ہیں ؂

اس کے برعکس بعض اوقات امورِ غیر معلومہ سے امورِ معلومہ کی طرف جانا مسائل کا حل سوچنے کے لیے مفید ثابت ہوتا ہے۔ یعنی اگر ہم نتیجے کو ثابت شدہ فرض کرتے ہوئے امورِ مفروضہ یا معلومہ تک پہنچنے کی کوشش کریں تو عمل کے مختلف درمیانی مدارج خود بخود واضح ہو جاتے ہیں۔ اس کو عملِ تحلیل و تجزّی کہتے ہیں ؂

ذیل کی چند مثالوں سے ہم تحلیل و تجزّی کا طریق واضح کریں گے :۔

پہلی مثال : ایسا مثلّث بناؤ۔ جس کا قاعدہ، قاعدے پر کا ایک زاویہ اور باقی اضلاع کا مجموعہ معلوم ہوں ؂



تحلیل : فرض کرو اب ج مطلوبہ مثلّث ہے جس کا زاویہ ج قاعدہ ب ج اور ب ا + ا ج کا طول ک معلوم ہے۔

اگر ج ا کو د تک اس طرح بڑھائیں کہ ج ا + ا د برابر ہو ک کے اور د ب کو ملائیں تو ظاہر ہے کہ ا د = ا ب

؞ ا ب̂ د = ا د̂ ب

مثلّث ب ج د کا بنانا آسان ہے۔ کیونکہ دو ضلعے اور اُن کا درمیانی زاویہ معلوم ہے۔ اب اگر د ب̂ ا کو ب د̂ ج کے برابر بنایا جائے تو مثلّث کا راس ا معلوم ہو جائے گا اور △ اب ج متشکل ہو جائے گا۔ اس تحلیل سے ہمیں عمل کا طریق کار معلوم ہو گیا اور ہم ذیل کی ترکیب سے مسئلے کی تشکیل کر سکتے ہیں ؂

ترکیب :

زاویہ ب ج̂ د کو ج̂ کے برابر بناؤ۔

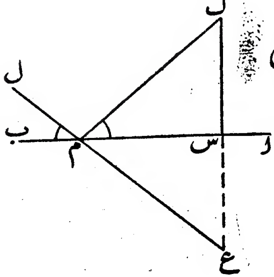
ج د کو ک کے برابر کاٹو۔ ب د کو ملاؤ۔

د ب میں نقطہ ب پر د ب̂ ا = ا د̂ ب بناؤ۔

پس اب ج مطلوبہ مثلّث ہوگا۔

دُوسری مثال :-

دیئے ہوئے خط مستقیم کی ایک ہی جہت میں دو نقاط دیئے ہوئے ہیں۔ ایسے دو خط کھینچنے مطلوب ہیں جو دیئے ہوئے نقطوں سے ایک نقطے پر ملیں اور خط کے ساتھ مساوی زاویے بنائیں۔



تحلیل :

فرض کرو اگر مطلوبہ خطوط ا ب کو نقطہ م پر ملیں تو ک م ا = ل م ب
اگر ہم ل م کو ع تک بڑھائیں تو ل م ب = ع م ا
لہٰذا ک م ا = ع م ا

اس سے ہمیں دو منطبق مثلثوں کا تصوّر پیدا ہوتا ہے۔ یعنی اگر ہم نقطہ ک سے عمود ک س گرائیں اُسے ع تک بڑھائیں تو دونوں مثلثوں کی تطبیق سے س ع اور س ک برابر ہوں گے۔ اور ع، م، ل ایک ہی خط پر واقع ہیں۔ اِس لیے م کا تعیّن ہو سکے گا۔

اِس تحلیل سے ذیل کی ترکیب حاصل ہوئی :-

ترکیب :-

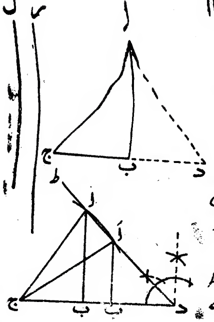
ک سے ا ب پر عمود ک س گراؤ اور اُسے ع تک اتنا بڑھاؤ کہ
ک س = س ع

ع کو ل سے ملاؤ جو ا ب کو نقطہ م پر کاٹے۔ م مطلوبہ نقطہ ہوگا۔ اور ل م اور ک م مطلوبہ خط ہوں گے ॥

[وتر اور دو ضلعوں کا مجموعہ دیا ہوا ہو تو قائم الزّاویہ مثلّث بنانا

تحلیل :

فرض کرو ا ب ج مطلوبہ مثلث قائم الزّاویہ ہے۔ جس کا وتر ا ج = ک اور ا ب + ب ج = ر معلوم ہے

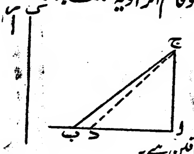


جب کو بڑھا کر اس میں سے
بد = اب قطع کرو۔
اد کو ملاؤ۔ دیکھو △ ادج
میں اج = ک اور جد = ر
موجود ہے۔ نیز ∵ ابد = 90°
∴ △ ابد قائم الزاویہ ہے۔
نیز ∵ اب = بد
∴ باد = بدا = 45°
اب △ ادج بنانا آسان ہے

ترکیب:

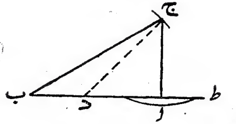
دج = ر کھینچو
د پر کا زاویہ جدط = 45° بناؤ۔ ج کو مرکز مان کر ک کی دوری پر قوس کھینچو جو دط کو نقاط ا، اَ پر قطع کرے۔ ا اور اَ سے دج پر عمود ڈالو۔
△ ابج اور △ اَبَج دی ہوئی شرائط پوری کریں گے اور مطلوبہ مثلث ہوں گے ۔

2 وتر اور دو ضلعوں کا فرق دیا ہو تو قائم الزاویہ مثلث بنانا۔



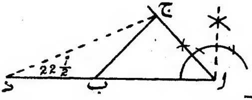
تحلیل: فرض کرو ابج مطلوبہ △ ہے۔ جس کا وتر بج = ک اور اب − اج = ر معلوم ہے
اب میں سے اد = اج قطع کرو۔ اور جد کو ملاؤ
△ ادج قائم الزاویہ متساوی الساقین ہے۔
∴ اجد = ادج = 45° پس زاویہ بدج = $180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$
اب ∵ △ بدج کے دو ضلعے بد اور بج معلوم ہیں اور بج کے سامنے کا زاویہ 135° ہے۔ اس لیے یہ مثلث بنا کر مطلوبہ △ کی تشکیل کی جا سکتی ہے ۔

ترکیب:



اِس میں سے $\overline{دب}$ = مر قطع کرو۔
اور ب$\hat{د}$ج = 135° بناؤ۔ پھر
ب کو مرکز مان کر ک کی دُوری پر
قوس کھینچو۔ جو $\overline{دج}$ کو ج پر ملے۔
ب ج کو ملاؤ۔ اور نقطہ ج سے
$\overline{ب ط}$ پر ⊥ $\overline{جا}$ گراؤ۔ پس اب ج مطلوبہ مثلّث ہوگا ۞

3 وتر اور ایک ضلع کا مجموعہ معلوم ہو تو متساوی السّاقین قائم الزّاویہ مثلّث بنانا۔



تحلیل: فرض کرو اب ج مطلوبہ متساوی السّاقین قائم الزّاویہ مثلّث ہے۔ جس کے وتر $\overline{اب}$ اور ضلع $\overline{بج}$ کا مجموعہ = ک معلوم ہے۔ $\overline{اب}$ کو بڑھا کر $\overline{بد}$ = $\overline{بج}$ قطع کرو۔ $\overline{جد}$ کو ملاؤ۔

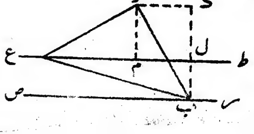
غور کرو مثلّث اب ج کا $\hat{ا}$ زاویہ = ا$\hat{ب}$ج = 45° اور ب$\hat{د}$ج + د$\hat{ج}$ب = 45°

لیکن ب$\hat{د}$ج = د$\hat{ج}$ب ∴ ب$\hat{د}$ج = $22\frac{1}{2}^\circ$

اب مثلّث ا د ج بنا کر د$\hat{ج}$ب = $\hat{د}$ = $22\frac{1}{2}^\circ$ بنانے سے مطلوبہ مثلّث کی تشکیل ہو جاتی ہے ۞

4 ایسا قائم الزّاویہ متساوی السّاقین مثلّث بنانا جس کے قاعدے کے دونوں سرے متوازی خطوط پر واقع ہوں اور جس کا راس متوازی خطوط سے باہر ایک معلومہ نقطے پر ہو ۞

تحلیل:

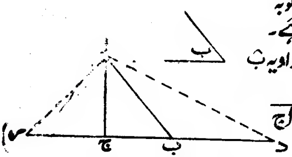


فرض کرو اب ج مطلوبہ مثلّث ہے۔ جس کا نقطۂ راس ا معلوم ہے۔ اور جس کے انجام ب اور

ج متوازی خطوط ط ع اور س ص میں واقع ہیں۔
نقطہ راس ا سے ط ع پر ا م عمود گراؤ۔ س ص پر ب د عمود نکالو پھر ا م پر عمود ا د نکالو۔ چوکور ل م ا د مربع ہے۔
اس طرح ہم س ص میں نقطہ ب معین کر سکتے ہیں۔ ط ع میں نقطہ ج ب ا کو پر ا ج عمود اٹھانے سے معین ہو سکتا ہے۔

ترکیب: نقطہ راس ا معلوم ہے۔ اس سے ط ع پر ا م عمود گراؤ۔ ا م پر مربع ا م ا د ل بناؤ۔ د ل کو بڑھاؤ کہ س ص سے ب پر ملے۔ ب ا کو ملاؤ اور ب ا ج = °90 بناؤ۔
ا ب ج مطلوبہ مثلث ہوگا۔

5 احاطہ اور ایک زاویہ دیا ہو تو قائم الزاویہ مثلث بنانا۔



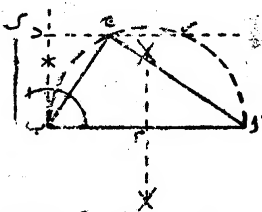
تحلیل: فرض کرو ا ب ج مطلوبہ مثلث قائم الزاویہ ہے۔ جس کا احاطہ د س کے برابر اور زاویہ ب معلوم ہے۔ ب ج کو بڑھا کر ب د = ا ب اور ج س = ا ج قطع کرو۔

غور کرو د̂ = د ا̂ ب اور ا ب̂ ج = د̂ + د ا̂ ب
∴ د̂ = $\frac{1}{2}$ ا ب̂ ج، دوسری طرف △ ا ج س میں ا ج = ج س
∴ س̂ = ج ا̂ س لیکن ا ج̂ س = °90 ∴ ا س̂ ج = °45
اب مثلث ا د س بنا سکتے ہیں۔ کیونکہ د س = احاطہ معلوم ہے۔ دیے ہوئے زاویے ب̂ کا نصف د̂ ہے۔
اور س̂ = °45

ترکیب:
△ ا د س بناؤ۔ پھر د ا̂ ب = د̂ اور ج ا̂ س = س̂ بناؤ۔
ا ب ج مطلوبہ مثلث ہوگا۔

ہدایات:
ذیل کے سوالات میں تحلیل کو برائے مشق چھوڑ دیا گیا ہے۔ اور حل ترکیب جو تحلیل سے اخذ ہوتا ہے۔ بطور اشارہ دے دیا گیا۔ عمل تحلیل طلبہ خود سوچیں:-

6 وُہ قائم الزّاویہ مثلّث بنانا جس کا وَتر اور قائمہ زاویہ سے وَتر پر کا عمُود دِیے ہُوئے ہوں۔

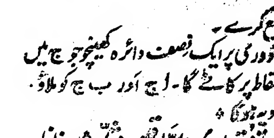


فرض کرو اب وَتر اور ک عمُود کی لمبائی ہے۔

عمل: اب کا وسطی نقطہ م دریافت کرو۔ م کو مرکز مان کر م ا کی دُوری سے دائرہ کھینچو۔ ب د کو اب پر عمُود کھینچو اور ب د کو ک کے برابر کاٹو۔ د سے خط د ج سا خط اب کے متوازی کھینچو جو ائرے کو ج اور سا پر کاٹے۔ ج ا اور ج ب کو ملاؤ۔ ا ب ج مطلوبہ △ ہوگا۔ اسی طرح سا ب بھی مطلوبہ مثلّث ہوگا۔

بطریقِ دیگر:

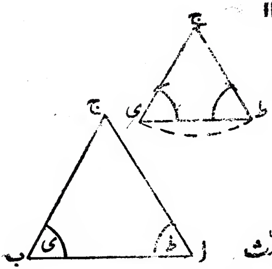
ل سا ایک غیر محدود خط لو اور اس کے کسی نقطہ ن سے عمُود نکالو۔ عمُود میں سے ن ج = مطلوبہ عمُود ک قطع کرو۔



ج مرکز سے دِیے ہُوئے وَتر کے نصف کے برابر نصف قطر کی دُوری پر قوس کھینچو جو ل سا کو م پر قطع کرے۔ اب م کو مرکز مان کر نصف وَتر کی دُوری پر ایک نصف دائرہ کھینچو جو ج میں سے گزرے گا اور ل سا کو ا، ب نقاط پر کاٹے گا۔ ا ج اور ب ج کو ملاؤ۔ پس ا ب ج مطلوبہ مثلّث قائم الزّاویہ ہوگا۔

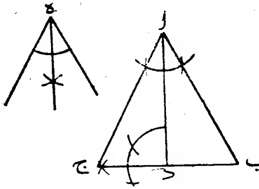
7 قاعدہ اور راسی زاویہ معلوم ہو تو متساوی السّاقین مثلّث بنانا۔

فرض کرو اب قاعدہ اور ج راسی زاویہ ہے۔ ج کو مرکز مان کر کسی مناسب



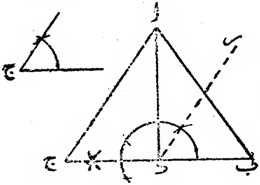
دُوری سے قوس کھینچو جو ج کے
بازوؤں کو ط اور ی پر کاٹے۔ ط ی
کو ملاؤ۔ ا پر زاویہ ب ا ج
زاویہ ط کے برابر بناؤ۔ اور
ب پر زاویہ ا ب ج زاویہ
ی کے برابر بناؤ۔ تا آنکہ اِن
زاویوں کے بازو نقطہ ج پر ملیں۔ تو مثلث
ا ب ج مطلوبہ متساوی الساقین مثلث ہوگا۔

8 اِرتفاع اور راسی زاویہ معلوم ہوں تو متساوی الساقین مثلث بنانا۔



فرض کرو ا د اِرتفاع ہے اور ہ
راسی زاویہ
عمل: زاویہ ہ کی تنصیف کرو۔ نقطہ د
میں سے ب د ج پر ا د عمود
کھینچو۔
ا پر زاویہ د ا ب، د ا ج نصف
ہ کے برابر بناؤ۔ اگر ان کے بیرونی بازو خط ب د ج کو ب، ج پر کاٹیں تو
ا ب ج مطلوبہ مثلث ہوگا۔

9 اِرتفاع اور قاعدے پر کا زاویہ ج معلوم ہو۔ تو متساوی الساقین مثلث بنانا۔



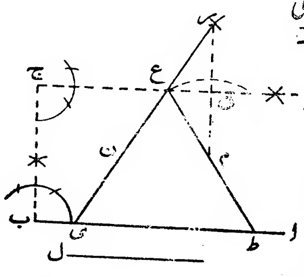
فرض کرو ا د اِرتفاع ہے اور
ج قاعدے پر کا زاویہ ہے۔
عمل: نقطہ د میں سے ب د ج
پر ا د عمود کھینچو۔
نقطہ د میں سے خط د س کھینچو جو
ب د س کو ج کے برابر بنائے
ا ج کو د س کے متوازی کھینچو۔ اگر ا ج اور ب ج کا تقاطع ج پر ہو تو

اج ایک ضلع ہوگا۔ ا کو مرکز مان کر اج کی دُوری سے قوس کھینچو۔ جو ب د ج کو ب پر ملے۔

پس اب ج مطلوبہ مثلّث ہوگا۔

10 مُتساوی السّاقین مثلّث بنانا جس کا ارتفاع معلوم ہو۔ قاعدہ کسی دیے ہوئے خط پر واقع ہو اور دونوں مُساوی ضلعے دو دیے ہوئے نقاط میں سے گزریں۔

فرض کرو اب قاعدے کا خط ہے ل ارتفاع کی لمبائی م اور ن دیے ہوئے نقاط ہیں۔

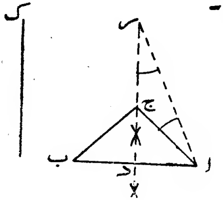


عمل: خط ج د خط اب کے متوازی فاصلہ ل پر کھینچو۔ م سے ج د پر عمود م ق کھینچو اور اُسے س تک بڑھاؤ تا آنکہ م ق = ق س

س ن کو ملاؤ جو ج د کو ع پر کاٹے۔ ع ن اور ع م کو ملاؤ اور انھیں اتنا بڑھاؤ کہ وہ اب کو ی اور ط پر قطع کریں

ع ط ی مطلوبہ مثلّث ہوگا۔

11 قاعدہ معلوم ہے ایک مُساوی ضلع اور ارتفاع کا مجموعہ معلوم ہے۔ مُتساوی السّاقین مثلّث بنانا۔

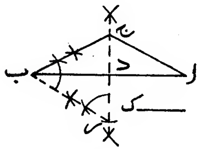


فرض کرو اب قاعدہ ہے مُساوی اضلاع میں سے ضلع اور ارتفاع کا مجموعہ ک کے برابر ہے۔

عمل: اب کا عمودی ناصف

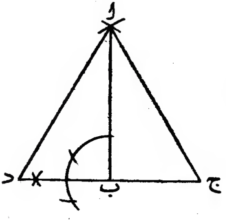
د س کھینچو۔ د س کو ک کے برابر کاٹو ا س کو ملاؤ۔ س ا ج = ا س ج بناؤ۔
اگر ا ج خط د س کو ج پر ملے تو ا ب ج مطلوبہ متساوی الساقین مثلث ہوگا ۔

12 قاعدہ معلوم ہے ایک مساوی ضلع اور ارتفاع کا فرق معلوم ہے۔ متساوی الساقین مثلث بنانا۔



فرض کرو ا ب قاعدہ ہے ایک مساوی ضلع اور ارتفاع کا فرق ک کے برابر ہے۔
عمل: ا ب کے عمودی ناصف د س کو ک کے برابر کاٹو ب س کو ملاؤ۔
س ب ج = ب س ج بناؤ۔
اگر ب ج، س د خارج شدہ کو نقطہ ج پر ملے تو ج کو ا اور کے ساتھ ملاؤ ا ب ج مطلوبہ مثلث ہوگا ۔

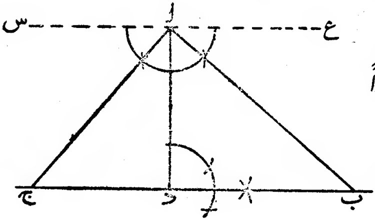
13 ارتفاع معلوم ہو تو متساوی الاضلاع مثلث بنانا۔



فرض کرو ارتفاع ا ب ہے۔
عمل: خط ج ب د، ا ب پر عموداً کھینچو۔ ا پر ب ا ج = ب ا د = 30° بناؤ۔ اگر ا ج اور ا د خط ج ب د کو ج اور د پر ملیں تو ا ج د مطلوبہ مثلث ہوگا ۔

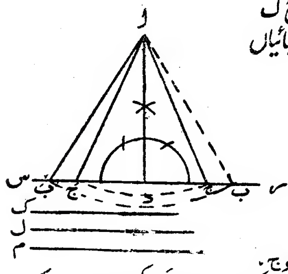
14 ارتفاع اور قاعدے کے زاویے معلوم ہوں۔ تو مثلث بنانا۔

فرض کرو ا د ارتفاع ہے اور ب اور ج دیے ہوئے زاویے ۔



عمل: ا میں سے ع ا س اور د میں سے ب د ج ارتفاع پر عموداً کھینچو۔ نقطہ ا پر س ا ج = ج اور ع ا ب = ب بناؤ۔ اگر ان کے بازو ب د ج کو ب اور ج پر ملیں تو ا ب ج مطلوبہ مثلث ہوگا۔

15 ارتفاع اور دو ضلعے معلوم ہوں تو مثلث بنانا۔



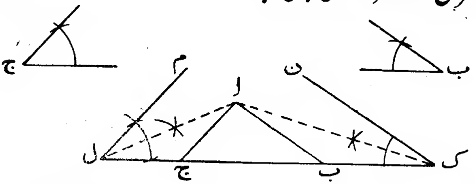
فرض کرو ارتفاع کی لمبائی ک ہے اور دو ضلعوں کی لمبائیاں ل اور م ہیں۔

عمل: کوئی خط س س لو اور اس پر ا د = ک عموداً کھینچو۔ ا کو مرکز مان کر ل کی دوری سے قوس کھینچو جو س س کو ج، ج پر کاٹے۔ ا کو مرکز مان کر م کی دوری سے قوس کھینچو۔ جو س س کو ب، ب پر کاٹے۔

نقاط ب، جَ، ج، بَ کو ا سے ملاؤ۔ پس مثلث ا ب ج، ا بَ ب اور ا ب جَ، ا بَ ج بنیں گے۔

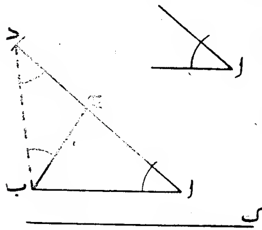
16 اِحاطہ اور قاعدے پر کے زاویے معلوم ہوں تو مثلّث بنانا۔

فرض کرو کل احاطے کی لمبائی ہے۔ ب اور ج دیئے ہوئے زاویے ہیں۔



عمل: ک اور ل پر کلم اور لکن زوایائے ج و ب کے برابر علیحدہ علیحدہ کھینچو۔ ل کا ناصف لا اور ک کا ناصف کا کھینچو جو نقطہ ا پر ملیں۔ اسے کن کے متوازی اب اور لم کے متوازی اج کھینچو اب ج مطلوبہ مثلّث ہوگا۔

17 مثلّث بنانا جب قاعدہ، قاعدے پر کا ایک زاویہ اور باقی اضلاع کا مجموعہ معلوم ہوں۔

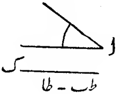


فرض کرو۔ اب قاعدہ ا اور ک دو ضلعوں کے مجموعے کی لمبائی معلوم ہیں۔

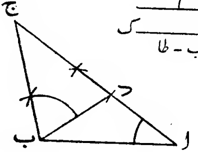
عمل: ب اد = ا بناؤ اور اد کو ک کے برابر کاٹو۔ دب کو ملاؤ زاویہ دب ج کو د کے برابر بناؤ۔ اب ج مطلوبہ مثلّث ہوگا۔

18 مثلّث بنانا جب قاعدے پر کا ایک زاویہ اور باقی اضلاع کا فرق معلوم ہو۔

فرض کرو اب قاعدہ ہے۔ ا دیا ہوا زاویہ اور ک اضلاع کا فرق ہے۔ دو صورتیں ہوں گی:۔

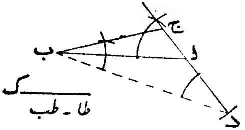


(۱) جب آ بڑے ضلع کے متصل ہے



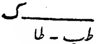
عمل: کوئی زاویہ ب آ ج = آ
بناؤ۔ آج میں سے آد = ک
کاٹو۔ ب د کو ملاؤ۔ زاویہ
د ب ج = ب د ج بناؤ
تب ا ب ج مطلوبہ مثلث ہوگا۔

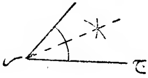
(۲) جب آ چھوٹے ضلعے کے
متصل ہے۔



عمل: زاویہ ب ا ج = آ بناؤ
ج ا کو د تک بڑھاؤ۔ تا آنکہ
اد = ک، ب د کو ملاؤ۔
د ب ج کو ب د ج کے برابر
بناؤ۔ ا ب ج مطلوبہ مثلث ہوگا۔

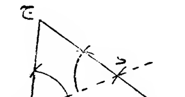
19 مثلث بنانا جب قاعدہ، قاعدے پر کے زاویوں کا فرق اور باقی اضلاع کا فرق معلوم ہو۔



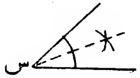


فرض کرو ا ب ضلع ہے
س = آ - ب اور ک
باقی دو ضلعوں کا فرق ہے

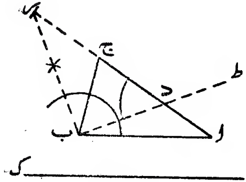
عمل: خط ب د کھینچو تاکہ
ا ب د = ½ س،
ا کو مرکز مان کر ک کی دوری
سے قوس کھینچو جو ب د کو د
پر ملے۔ اد کو ملاؤ اور اس کو
ج تک بڑھاؤ۔
د ب ج کو ب د ج کے برابر بناؤ۔
ا ب ج مطلوبہ مثلث ہوگا۔



20 مثلث بنانا جب قاعدہ، قاعدے پر کے زاویوں کا فرق اور باقی اضلاع کا مجموعہ معلوم ہو۔



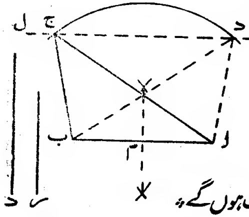
فرض کرو اب قاعدہ ہے۔ س̂ قاعدے کے زاویوں کا فرق اور ک دو ضلعوں کا مجموعہ



عمل: خط ب ط کھینچو۔ جو قاعدے کے ساتھ زاویہ ½ س̂ بنائے۔
خط ب س خط ب ط پر عمود کھینچو۔
ا کو مرکز مان کر ک کی دوری سے قوس کھینچو جو ب س کو س پر کاٹے
ا س کو ملاؤ جو ب ط کو د پر کاٹے۔
د ب̂ ج کو ب د̂ ج کے برابر بناؤ
تب ا ب ج مطلوبہ مثلث ہوگا۔

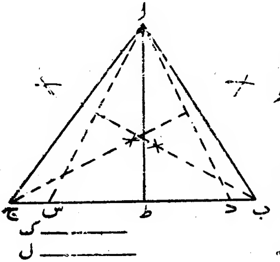
21 مثلث بنانا جب قاعدہ، ارتفاع اور قاعدے کا وسطانیہ معلوم ہوں۔

فرض کرو اب قاعدہ ہے
س ارتفاع اور د وسطانیہ کا طول ہے۔



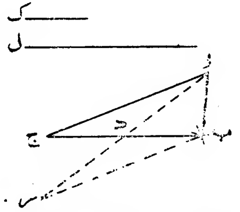
عمل: ک ل کو اب کے متوازی س کے فاصلے پر کھینچو۔ اب کی تنصیف نقطہ م پر کرو۔ م کو مرکز مان کر د کی دوری سے قوس کھینچو۔ جو ک ل کو نقاط ج، د پر ملے۔
ا ج، ا د، ب د، ب ج کو ملاؤ
تب ا ب ج اور ا ب د مطلوبہ مثلث ہوں گے۔

22 مثلث بنانا جب راس سے قاعدے کا عمود معلوم ہو اور ہر ضلع اور اس کے متصل قاعدے کے مقطوع کے فرق معلوم ہوں۔



فرض کرو اط ارتفاع ہے۔ ک اور ل دیے ہوئے فرق ہیں۔ ط کی مختلف جہتوں میں ب ج پر
ط د = ک اور ط س = ل کاٹو
ا د ، ا س کو ملاؤ۔
ا س کا عمودی ناصف کھینچو۔ جو ب ج کو ب پر ملے۔ پھر ا د کا عمودی ناصف کھینچو۔ جو ب ج کو ج پر ملے، ا ب ، ا ج کو ملاؤ۔
اب ج مطلوبہ مثلث ہوگا۔

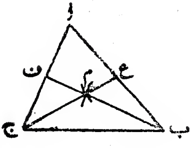
23 مثلث بنانا جس کے دو ضلعے اور ان کے نقطۂ تقاطع سے گزرنے والا وسطانیہ معلوم ہوں۔



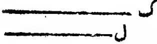
فرض کرو ا د وسطانیہ ہے۔ اور ک، ل دو ضلعے ہیں۔ ا د کو س تک بڑھاؤ تا آنکہ د س = ا د ، ا کو مرکز مان کر ک کی دوری سے قوس کھینچو۔ س کو مرکز مان کر ل کی دوری سے قوس کھینچو۔ اگر دونوں قوسیں ب پر ملیں تو ب کو د سے ملاؤ اور ب د کو ج تک بڑھاؤ تا آنکہ د ج = ب د ، ا ج کو ملاؤ۔
اب ج مطلوبہ مثلث ہوگا۔

24 مثلث بنانا جس کا ایک ضلع اور باقی دو ضلعوں کے وسطانیے معلوم ہوں۔

فرض کرو۔ ضلع ب ج اور ک، ل وسطانیے دونوں معلوم ہیں۔ ب ج پر مثلث ب ج م بناؤ۔ جس کے دو ضلعے $\frac{2}{3}$ ک اور $\frac{2}{3}$ ل کے برابر ہوں۔



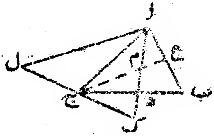
جم کو ع تک اور بم کو ت تک بڑھاؤ تاآنکہ مع = ½ ک اور مت = ½ ل ہوں، جت کو ملاؤ، بع کو ملاؤ۔ اگر یہ دونوں نقطہ ا پر ملیں تو اب ج مطلوبہ مثلث ہوگا۔



[دیکھو نتیجہ صریح ۱ مسئلہ 39]

25 مثلث بناؤ جس کے تینوں وسطانیے معلوم ہوں۔

مثلث اب ج بناؤ جس کے اضلاع ع تینوں وسطانیوں کے برابر ہوں۔ اب ج کے وسطانیے اد، ج ع کھینچو جو نقطہ م پر قطع کریں۔ م د کو ک تک بڑھاؤ تاآنکہ

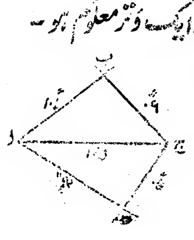


دک = مد

ک ج کو ملاؤ اور اس کو ل تک بڑھاؤ تاآنکہ جل = کج۔ ال کو ملاؤ۔ اک ل مطلوبہ مثلث ہوگا۔ نیز دیکھو نتیجہ صریح نمبر ۱ مسئلہ نمبر 39

چار ضلعی شکل (چوکور) بنانا:-

26 چوکور بناؤ جب چاروں ضلعے اور ایک وتر معلوم ہو۔

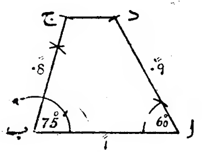


فرض کرو اب = ۱.۱، بج = ۰.۹،
جد = ۰.۸، دا = ۱.۲،
اج = ۱.۳

عمل: اج کو ۱.۳ کے برابر لو۔ ا، ج کو مرکز مانتے ہوئے ۱.۱ اور ۰.۹ کی

ڈوری سے بالترتیب دو قوسیں کھینچو جو نقطہ ب پر ملیں پھر ا اور ج کو مرکز مان کر
1.2ً اور 8ً. کی ڈوری سے قوسیں کھینچو جو نقطہ د پر ملیں ۔
اب ج د مطلوبہ چوکور ہوگا ۔

27 چوکور بناؤ جس کے تین اضلاع اور ان کے دو اندرونی زاویے دیئے ہوں ۔

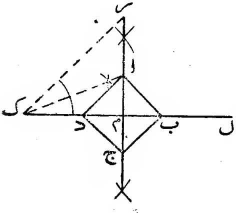


فرض کرو اب = اً ، اد = 9ً. ،
بج = 8ً. ، ب̂ = 75° ،
ا̂ = 60°

عمل : اب کو اً کے برابر لو ۔
اب̂ج کو 75° کے برابر اور
ب ا̂د کو 60° کے برابر بناؤ
بج کو 8ً. کے برابر اور اد کو 9ً. کے برابر کاٹو ۔ ج د کو ملاؤ ۔
اب ج د مطلوبہ چوکور ہوگا ۔

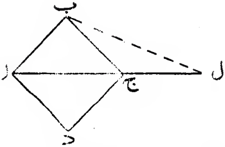
28 مربع بنانا جب وتر اور دو ضلعوں کی لمبائی کا مجموعہ معلوم ہو ۔

فرض کرو ک ل معلومہ لمبائی ہے جو وتر اور ضلعوں کے مجموعے کے برابر
ہے ۔ ک ل کا وسطی نقطہ م لو اور
م س عمودی ناصف کھینچو ۔



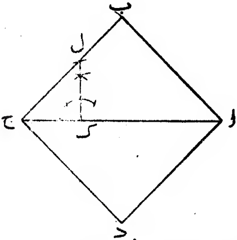
م س = م ک کاٹو ۔ ک س کو
ملاؤ زاویہ م ک س کا ناصف
ک ا کھینچو ۔ جو م س کو ا پر کاٹے
اسے اد ∥ س ک کھینچو ۔
اد مربع کا ایک ضلع ہوگا ۔

29 ایک مربع بنانا جس کا ایک ضلع اور وتر کا مجموعہ معلوم ہو ۔



اشارہ: اَل معلومہ مجموعے کے
برابر لو۔ ل اَ ب = $45°$
اور اَل ب = $22\frac{1}{2}°$ بناؤ
اَب پر مطلوبہ مربع اَب ج د
بناؤ۔

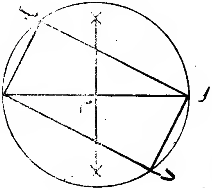
30 مربع بنانا جب وتر اور ایک ضلع کا فرق معلوم ہو۔



فرض کرو وتر اور ضلع کا فرق
ج ک کے برابر ہے ک ل کو
ک اَ پر عموداً کھینچو۔ اور
ک ل = ک ج قطع کرو
اَ ج کو ملا کر ب تک اس
طرح بڑھاؤ کہ ل ب = ل ک
پس ج ب مربع کا ایک ضلع
ہوگا۔ ثبوت مہیا کرو۔

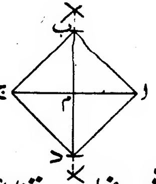
31 مستطیل بنانا جب وتر اور ایک ضلع معلوم ہوں۔

فرض کرو وتر = 1.8 گ
اور ضلع = .8 گ



عمل: اَج کو 1.8 گ کے برابر لے کر
اس پر اَج قطر کا دائرہ کھینچو۔
اَ اور ج کو مرکز مان کر .8 گ کی
دوری سے قوس کھینچو جو دائرے
کو ب، د پر کاٹیں۔ اَب، ب ج،
ج د، د اَ کو ملاؤ۔
تب اَ ب ج د مطلوبہ مستطیل ہوگا۔

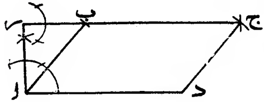
32 مربع بنانا جس کا وتر دیا ہوا ہو۔

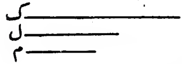


فرض کرو اج وتر ہے۔ اج
کا نقطۂ وسطی م لو اور اس سے
عمودی ناصف ب م د کھینچو۔
م ب = م د = م ا کاٹو۔
اب ج د مطلوبہ مربّع ہوگا۔

33 مُتوازی الاضلاع بنانا جب دو متّصلہ ضلعے اور ارتفاع معلوم ہوں۔

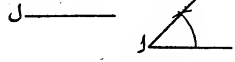
فرض کرو۔ ک، ل دو ضِلعوں
کی لمبائیاں اور م ارتفاع کی
لمبائی ہے۔



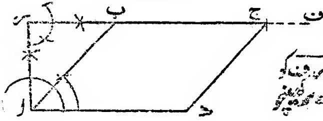


عمل: اد = ک لو۔ سج کو
اد کے مُتوازی م فاصلے پر
کھینچو۔ ا اور د کو مرکز مان کر
ل کی دُوری سے قوس کھینچو جو
سج کو نقاط ب، ج پر کاٹیں۔
اب، ج د کو ملاؤ۔ اب ج د مطلوبہ مُتوازی الاضلاع ہوگا۔

34 مُتوازی الاضلاع بنانا جب قاعدہ، ارتفاع اور قاعدے پر کا ایک زاویہ معلوم ہوں۔



فرض کرو ایک ضِلع کی لمبائی
ک اور ارتفاع کا طول ل ہے
اور قاعدے کا
ایک زاویہ ا ہے

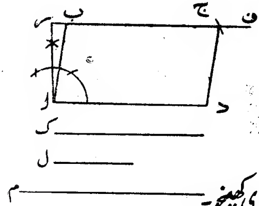


عمل: اد = ک لو۔ سف کو
اد کے || ل فاصلے پر کھینچو
د ا ب = ا بناؤ۔
فرض کرو اب خط سف کو
ب پر کاٹتا ہے۔ د کو مرکز مان کر اب کی دُوری سے قوس کھینچو۔ جو

س ف کو ج پر کاٹے۔ د ج کو ملاؤ۔ ا ب ج د مطلوبہ متوازی الاضلاع ہوگا۔

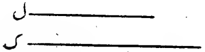
35 متوازی الاضلاع بنانا جب قاعدہ، ارتفاع اور ایک وتر دیے ہوں۔

فرض کرو ک، ل، م قاعدہ ارتفاع اور وتر کے طول ہیں

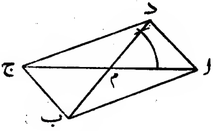


عمل: ا د کو ک کے برابر لو۔ س ف کو ا د کے متوازی ل فاصلے پر کھینچو۔ ا کو مرکز مان کر م کی دوری سے قوس کھینچو جو س ف کو ج پر کاٹے۔ د ج کو ملاؤ۔ ا ب کو د ج کے متوازی کھینچو۔ تب ا ب ج د مطلوبہ اا ع ہوگا۔

36 متوازی الاضلاع بنانا جب دو وتر اور اُن کا درمیانی زاویہ معلوم ہوں۔



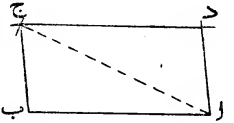
فرض کرو ک، ل دو وتروں کی لمبائیاں ہیں اور ط ان کے مابین زاویہ ہے۔

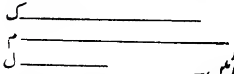


عمل: ا م د = ط بناؤ۔ م ا اور م د کو بالترتیب $\frac{1}{2}$ ک اور $\frac{1}{2}$ ل کے برابر کاٹو۔ ا م کو ج تک اور د م کو ب تک اتنا بڑھاؤ کہ م ج = م ا اور م ب = م د، ا ب، ب ج، ج د، د ا کو ملاؤ۔ ا ب ج د مطلوبہ متوازی الاضلاع ہوگا۔

37 مُتوازی الاضلاع بنانا جب دو ضلعے اور ایک وَتر معلوم ہوں۔

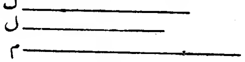
فرض کرو ک اور ل دو ضلعوں
کی لمبائیاں اور م ایک وَتر
کی لمبائی معلوم ہے ٭



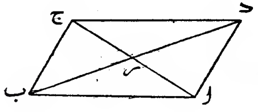


عمل: اب کو ک کے برابر لو۔
ا کو مرکز مان کر م نصف قطر
کی دُوری پر اور ب کو مرکز مان کر
ل نصف قطر کی دُوری پر دو قوسیں
کھینچو۔ جو ایک دُوسری کو نقطہ ج پر کاٹیں۔
اج اور ب ج کو ملاؤ۔ ا مرکز سے ب ج = ل اور ج مرکز سے اب = ک
نصف قطر کی قوسیں کھینچو۔ جو ایک دُوسری کو د پر کاٹیں۔
اد اور ج د کو ملاؤ۔
اب ج د مطلوبہ مُتوازی الاضلاع ہوگا۔
انتباہ: اگر اب اور ب ج اضلاع اور وَتر ب د معلوم ہو تو
٭ ب ج = اد (اا ع کے متقابلہ ضلعے)
∴ اب ، اد دو ضلعے اور وتر ب د معلوم ہیں جو △ اب د بنانے
کے لیے ضرُوری ہیں ٭

38 مُتوازی الاضلاع بنانا جب ایک ضلع اور دو وَتر معلوم ہوں۔

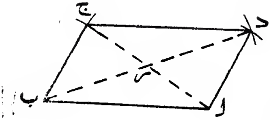


فرض کرو مطلوبہ اا ع کا ضلع
اب = ک ، وتر اج = ل
اور وَتر ب د = م معلوم ہے



تحلیل:
٭ اا ع کے وَتر ایک دُوسرے کی
تنصیف کرتے ہیں۔
فرض کرو کہ نقطہ تقاطع س ہے
∴ س ا = $\frac{1}{2}$ ل ، س ب = $\frac{1}{2}$ م
∴ △ اب س کے تینوں ضلعے معلوم ہیں جو بن سکتا ہے ٭

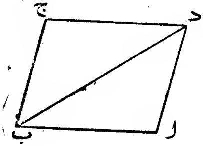
عمل: اب = ک لو اور ا، ب
مرکزوں سے علی الترتیب ½ ل
½ م نصف قطروں کی دوری پر
قوسیں کھینچو۔ جو س پر کاٹیں ۔



اس اور س ب کو ملا کر تکون اس ب
مکمل کرو۔ اس اور ب س کو بڑھاؤ
اور س د = ب س، س ج = اس
کاٹو اد، د ج اور ج ب کو ملاؤ۔
اب ج د مطلوبہ متوازی الاضلاع ہے۔

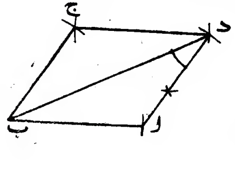
39 متوازی الاضلاع بنانا۔ جب ایک ضلع، ایک وتر اور اس وتر اور دوسرے نامعلوم ضلع کا درمیانی زاویہ معلوم ہوں۔

تحلیل: فرض کرو اب ج د مطلوبہ
متوازی الاضلاع ہے۔ جس کا
اب ضلع 1.0 گ، ب د وتر = 1.6 گ
اور د ب̂ ج = 30° معلوم
ہے۔



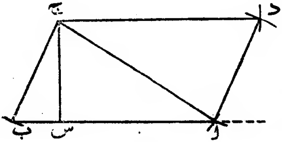
∵ ب ج ∥ اد اور ب د
انھیں قطع کرتا ہے۔
∴ ب د̂ ا = ج ب̂ د (متبادلہ زاویے)
پس △ اب د کا بنانا آسان ہے
اور اس کے بعد متوازی الاضلاع کی تکمیل ہو سکتی ہے۔

عمل: ب د وتر = 1.6 گ کھینچو۔
ب د̂ ا = 30° بناؤ۔
ب کو مرکز مان کر 1.0 گ کی دوری
پر قوس لگاؤ جو د ا کو ا پر کاٹے
نقطہ ب سے ب ج ∥ اد اور نقطہ
د سے د ج ∥ اب کھینچو۔



پس اب ج د مطلوبہ متوازی الاضلاع ہے۔

40 متوازی الاضلاع بنانا جب ایک ضلع، دوسرے ضلع پر کا ارتفاع اور ایک وتر معلوم ہوں۔



اشارہ: ایک غیر محدود خط کے نقطہ س سے عمود نکالو۔ س ج = ارتفاع قطع کرو۔ ج کو مرکز مان کر معلومہ ضلع کی دوری پر قوس کھینچو۔ جو غیر محدود خط کو ب پر کاٹے۔ پھر ج مرکز سے معلومہ وتر کی دوری پر دوسری قوس کھینچو۔ جو غیر محدود خط کو ا پر قطع کرے۔ اسے اد || ج ب اور ج سے ج د || اب کھینچو۔

41 متوازی الاضلاع بنانا۔ جب دو وتر اور ایک ارتفاع معلوم ہوں۔

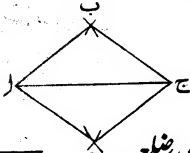
اشارہ: ل م ایک غیر محدود خط لو۔ اور اس کے متوازی معلومہ ارتفاع کے برابر فاصلے پر خط س ر کھینچو۔ س ر میں کوئی نقطہ ج لو۔ ج مرکز سے ایک وتر کے برابر نصف قطر کی قوس کھینچو جو ل م کو ا پر کاٹے۔ ج ا کی تنصیف ط پر کرو۔ ط کو مرکز مان کر دوسرے وتر کے نصف کے برابر دوری پر دو قوسیں لگاؤ جو ل م کو ب پر اور س ر کو د پر قطع کریں۔ اد، ب ج کو ملاؤ۔ اب ج د مطلوبہ ا اع ہے۔

42 معیّن بنانا جب دو وتر معلوم ہوں۔

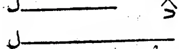
دو خط زاویہ قائمہ بناتے ہوئے لو اور سوال 36 کی طرح عمل کرو۔

43 معیّن بنانا جس کا ایک وتر اور ایک ضلع معلوم ہوں۔

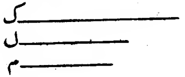
عمل: وتر ک کو قاعدہ لے کر اس پر دو متساوی الساقین مثلث بناؤ۔



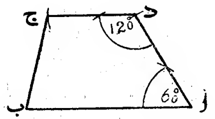
جن کا ہر ضلع
دیے ہوئے
ضلع کے برابر
ہو ؂



44 ذوزنقہ بنانا جب دو مُتوازی ضلعے، ایک غیر مُتوازی ضلع اور ایک زاویہ معلُوم ہوں ؂



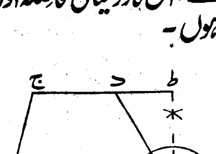
فرض کرو مُتوازی ضلعے ک، ل
غیر مُتوازی ضلع م اور غیر مُتوازی
ضلعے اور مُتوازی ضلعوں میں سے
چھوٹے ضلع کا درمیانی زاویہ
120° معلُوم ہے ؂



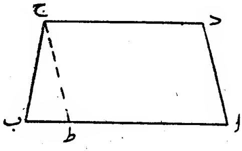
عمل: اب = ک لو ،
ب اد = 60° بناؤ۔
اد = م کاٹو ،
ادج = 120° بناؤ۔
دج = ل قطع کرو۔ ج ب کو ملاؤ۔
اب ج د مطلوبہ ذوزنقہ ہے ؂

45 ذوزنقہ بنانا۔ جب مُتوازی ضلعے، اُن کا درمیانی فاصلہ اور ایک غیر مُتوازی ضلع معلُوم ہوں۔

اشارہ: دو مُتوازی خط معلُومہ فاصلے
پر کھینچو۔ ا مرکز سے غیر مُتوازی ضلع
کی دُوری پر قوس لگاؤ۔ اد کو ملاؤ
دج چھوٹے مُتوازی ضلع کے
برابر اور اب بڑے ضلع کے برابر
کاٹو ؂

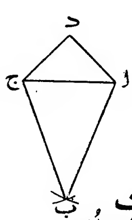


46 ذوزنقہ بنانا جب دونوں مُتوازی ضلعے اور دونوں غیر مُتوازی ضلعے معلوم ہوں۔



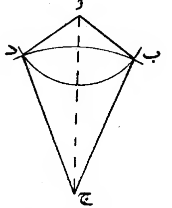
اشارہ: اضلاع معلوم ہیں
ج ط || ا د
∴ ا ط = ج د ، ط ب
= ا ب − ج د
پہلے مثلث ج ط ب بناؤ۔
ب ط کو بڑھا کر ط ا = ج د کاٹو
ا د || ج ط اور د ج || ا ط کھینچو۔

47 (ا) پتنگ بنانا جب دو غیر مُساوی مُتّصلہ ضلعے اور چھوٹا وَتر معلوم ہوں۔



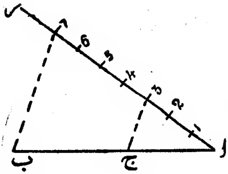
اشارہ: ا ج وَتر پر ا ج د متساوی السّاقین بناؤ۔ جس میں ا د = ج د = چھوٹا ضلع، دوسری طرف ا ج قاعدے پر ا ب ج متساوی السّاقین بناؤ۔
ا ب = ب ج = بڑا ضلع

(ب) پتنگ بنانا جب زاویوں کی تنصیف کرنے والا وَتر اور غیر مُساوی مُتّصلہ ضلعے معلوم ہوں۔



اشارہ: ا ج وتر دی ہوئی لمبائی کے برابر کھینچو۔ ا مرکز سے چھوٹے ضلع ا ب کی دُوری پر ایک قوس لگاؤ۔ پھر ج مرکز سے بڑے ضلع ب ج کی دُوری پر قوس لگاؤ۔ جو پہلی قوس کو نقاط ب اور د پر کاٹے
ا ب ج د مطلوبہ پتنگ ہے

48 دِیے ہُوئے خط میں سے کوئی کسری حصّہ (مثلاً $\frac{3}{7}$) کاٹو۔

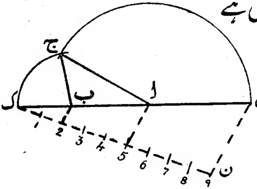


عمل: اب کے ساتھ کوئی زاویہ بنانا

ہوا خط ار کھینچو اور اس پر 7
مُساوی حصّوں کے نشان لگاؤ
7ب کو ملاؤ اور 3 سے 3ج || 7ب
کھینچو۔
تب اج $= \frac{3}{7}$ اب ہوگا۔

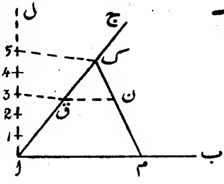
49 مثلّث بنانا۔ جس کا اِحاطہ اور ضلعوں کی نسبت معلوم ہوں۔

فرض کرو احاطہ = ک ل اور
اضلاع کی نسبت 2 : 3 : 4 کی ہے



عمل: ک سے کوئی خط
ک ن کھینچو اور اس پر
2 + 3 + 4 = 9 حصّوں
کے نشان لگاؤ۔ 9 ل کو ملاؤ
اور نشان 5، 2 سے 5ا اور
2ب اِس کے || کھینچو۔ ا کو مرکز
مان کر ال کی دُوری سے قوس کھینچو پھر ب کو مرکز مان کر ب ک کی دُوری سے
قوس کھینچو۔ جو پہلی قوس کو ج پر کاٹے۔ اج اور ب ج کو ملاؤ۔
اب ج مطلوبہ مثلّث ہوگا۔

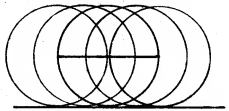
50 اب اور اج دو متقاطع خطوط ہیں اور ن دیا ہوا نقطہ ہے ن سے ایسا خط کھینچو جس کے سرے اب اور اج پر ہوں۔ اور جو ن پر 3 : 2 کی نسبت میں تقسیم ہو۔



خط ن ق || اب کھینچو۔
نقطہ ک کو اِس طرح لو کہ
اق : ق ک = 3 : 2
ک ن کو ملاؤ اگر یہ اب کو م
پر ملے تو ک ن م مطلوبہ خط ہوگا۔

طریق النقاط

1 فرض کرو ایک پہیہ جس کا قطر 2 فٹ ہے اُفقی سڑک کے ساتھ ساتھ سیدھا حرکت کرتا ہے اگر ہم یہ دیکھنا چاہیں کہ اس کا مرکز کس طرح حرکت کر رہا ہے تو صاف ظاہر ہے کہ مرکز



ہمیشہ سڑک سے ایک فٹ اُونچا رہتا ہے اور ایک سیدھے خط میں حرکت کرتا ہے۔ جو سڑک کے متوازی ہے اسی خط کو مرکز کا طریق کہتے ہیں۔ طریق کے معنی ہیں "راستہ"

2 گھڑی کی سوئی کی نوک ایک دائرہ بناتی ہے اس لیے اس کا طریق دائرہ ہے۔

3 گائے کو کھونٹے کے ساتھ باندھو، اگر وہ اس طرح پھرے کہ زنجیر کھنچی رہے تو گائے کی گردن کا طریق دائرہ ہوگا۔

4 بچہ جھولا جھول رہا ہے۔ اس کا طریق دائرے کی قوس ہے۔

5 کلاک کے لنگر کی نوک کا طریق دائرے کی قوس ہے۔

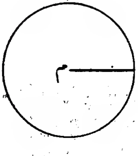
6 ایک نقطہ اس طرح حرکت کرتا ہے کہ وہ ایک محدود خط ا ب سے ہمیشہ یکساں

فاصلے پر رہتا ہے۔ اس کا طریق دو متوازی خطوط اور دو نصف دائروں پر مشتمل ہوگا جیسا شکل میں دکھایا گیا ہے۔

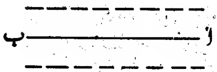
تعریف: جب کوئی نقطہ کسی دی ہوئی شرط یا شرائط کے مطابق حرکت کرے تو اس حرکت سے جو شکل پیدا ہوتی ہے وہ اس نقطے کا طریق کہلاتی ہے۔ بالفاظِ دیگر اگر کسی نقطے کی حرکت اس طرح محدود کر دی جائے کہ وہ صرف کسی خاص راستے پر چل سکے تو اس راستے کو طریق کہتے ہیں۔ طریق النقاط کے لیے دو شرائط لازم ہیں (1) ہر نقطہ جو طریق پر واقع ہو اُسے لازم ہے کہ دی ہوئی شرائط کو پورا کرے (2) ہر نقطہ جو دی ہوئی شرائط کو پورا کرے لازم ہے کہ وہ طریق پر واقع ہو۔

اس لیے طریق کا ثبوت دونوں طرح ہونا چاہیے براہِ راست اور اس کے بالعکس ؂

مثالیں

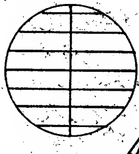


1 اُس نقطے کا طریق جو ہمیشہ دیے ہوئے نقطہ م سے $\frac{1}{2}$ انچ کے فاصلے پر رہے وُہ دائرہ ہے جس کا مرکز م ہے اور جس کا نصف قطر $\frac{1}{2}$ ہر ایسا نقطہ دائرے پر واقع ہوگا اور دائرے کا ہر نقطہ م سے $\frac{1}{2}$ کے فاصلے پر ہوگا ؂

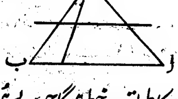


2 اگر ایک نقطہ اس طرح حرکت کرے کہ وُہ ایک قائم خط اب سے (جس کا طول معلوم نہیں) ہمیشہ یکساں فاصلے پر رہتا ہے تو نقطے کا طریق دو متوازی خطوط ہوں گے جو اب کے ہر دو جانب واقع ہوں گے اور ہر نقطہ جو ان متوازی خطوط پر ہوگا اب سے اُتنے ہی فاصلے پر ہوگا ؂

3 اُن تمام نقاط کا طریق جو کسی دیے ہوئے نقطہ م سے ایک ہی سمت میں واقع ہیں۔ ایک خط ہوگا جو نقطہ م میں سے اُس سمت میں کھینچا جائے گا ؂



4 دائرے کے متوازی وتروں کے وسطی نقاط کا طریق دائرے کا ایک قطر ہوگا ؂



5 اگر نقطہ م سے اب تک مختلف خطوط کھینچے جائیں تو ان خطوط کے وسطی نقاط کا طریق ایک ایسا خط ہوگا جو اب کے متوازی ہے ؂

6 اگر ایک نقطہ دو دیے ہوئے نقطوں سے مساوی فاصلے پر ہو۔ تو اس کا طریق وہ خط ہوگا جو دیے ہوئے نقاط کے ملانے والے خط کی عمودی تنصیف کرے گا۔ دیکھو مسئلہ نمبر 35

7 ایک نقطہ اِس طرح حرکت کرتا ہے کہ دو دِیے ہُوئے مُنقاطع خطوطِ مُستقیم سے اُس کے عمُودی فاصلے برابر رہتے ہیں تو اس نقطے کا طریق خطُوط کے درمیانی زاویوں کے ناصف ہوں گے (دیکھو مسئلہ نمبر 36)

مشق

نوٹ: مُبتدی کو چاہیے کہ پہلے چند ایسے نقاط لے جو دی ہُوئی شرائط کو پُورا کرتے ہیں۔ پھر اِن نقاط میں سے ایک خط گزارے۔ اِس طرح طریق کی شکل عیاں ہوجائے گی۔

1 مثلّث کا قاعدہ اور ارتفاع دِیے ہُوئے ہیں۔ راس کا طریق معلُوم کرو۔

2 مستطیل کا قاعدہ دیا ہُوا ہے۔ وَتروں کے ارتفاع کا طریق معلوم کرو۔

3 دائرے کے نصف قطروں کے وسطی نقاط کا طریق معلوم کرو۔

4 دو متوازی خط کھینچو اور پانچ ایسے مُتقاطع خطوط کھینچو جو اِن کو قطع کریں مُتقاطع خطوط کے جو ٹکڑے متوازی خطُوط کے درمیان واقع ہیں۔ اُن کے نقاطِ وسطی کا طریق معلُوم کرو۔

5 کھڑکی کے شیشے پر ایک سُرخ نقطہ ہے۔ اگر کھڑکی کا دروازہ عمُودی محور کے گرد کھولا جائے تو نقطے کا طریق معلُوم کرو۔

6 ایک خط اب لو۔ اُس کے اُوپر اور نیچے پانچ نقاط 2 سم کے فاصلے پر لو۔ اس طرح اُس نقطے کا طریق معلُوم کرو۔ جس کا فاصلہ دیے ہُوئے خط سے 2 سم کے برابر ہے۔

7 ا اور ب دو نقاط ایک دُوسرے سے اَ کے فاصلے پر ہیں۔ ط ایک نقطہ اِس طرح حرکت کرتا ہے کہ ط ا = 2 ط ب نقطہ ط کے چند مقام لو اور اِس کا طریق متشکل کرو۔

8 ا، ب دو نقاط ایک دُوسرے سے اَ کے فاصلے پر ہیں، ط ایک نقطہ اِس طرح حرکت کرتا ہے کہ ط ا + ط ب = ۱·5 نقطہ ط کے چند مقام لو اور اُس کا طریق متشکل کرو۔

9 دو خط و لا، و ما لو جو ایک دُوسرے کو علی القوائم قطع کریں۔ اگر نقطہ ط کا فاصلہ و لا سے اُتنا ہی ہو جتنا و ما سے ہے تو ط کا طریق بتاؤ۔

10 دو خط دلا، دما لو۔ جو ایک دوسرے کو علی القوائم قطع کریں۔ اگر نقطہ ط اس طرح حرکت کرے کہ دلا اور دما سے اس کے فاصلوں کا مجموعہ 2 گ ہو تو ط کا طریق معلوم کرو ۔

11 دو خط دلا، دما لو جو ایک دوسرے کو علی القوائم قطع کریں اگر نقطہ ط اس طرح حرکت کرے کہ دلا اور دما سے اس کے فاصلوں کا فرق $\frac{1}{2}$ ہو تو ط کا طریق معلوم کرو ۔

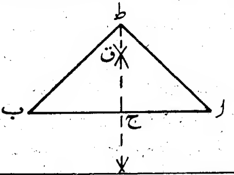
12 دو خط دلا، دما علی القوائم لو۔ نقطہ ط سے طل اور طم ان خطوط پر عمود کھینچو۔ اگر طل + 2 طم = 3 گ تو ط کا طریق معلوم کرو ۔

13 دو متوازی خطوط کھینچو۔ اس نقطے کا طریق بتاؤ۔ جس کا فاصلہ ہر دو خطوط سے مساوی ہو ۔

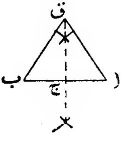
مسئلہ 35

(اثباتی)

اُس نُقطے کا طریق جو دو قائم نُقطوں سے مُساوی الفاصلہ ہو وُہ عمُود ہوتا ہے جو ان قائم نُقاط کے ملانے والے خط کی تنصیف کرے ۔



مفرُوض	فرض کرو دو قائم نقاط ا ، ب دِیے ہُوئے ہیں ۔
مطلُوب	(1) اگر کوئی نُقطہ ط ایسا ہو کہ $\overline{\text{طا}} = \overline{\text{طب}}$ تو نقطہ ط ، $\overline{\text{اب}}$ کے عمُودی ناصِف پر واقع ہوگا (2) اگر عمُودی ناصِف پر کوئی نقطہ ق لیا جائے تو $\overline{\text{قا}}$ اور $\overline{\text{ق ب}}$ برابر ہوں گے
عمل	$\overline{\text{اب}}$ کو ملاؤ اور ج پر اُس کی تنصیف کرو ۔
ثبوت	(1) $\overline{\text{طج}}$ کو ملاؤ $\triangle^{\text{ن}}$ اج ط ، ب ج ط میں $\overline{\text{اج}} = \overline{\text{ج ب}}$ ، $\overline{\text{اط}} = \overline{\text{ب ط}}$ اور $\overline{\text{طج}}$ مُشترک ہے $\therefore$ $\triangle$ اج ط $\equiv$ $\triangle$ ب ج ط $\therefore$ ا$\hat{\text{ج}}$ط = ب$\hat{\text{ج}}$ط مگر یہ خط کے ایک ہی طرف مُتصِلہ زاویے ہیں $\therefore$ ہر ایک قائمہ ہے اور $\overline{\text{طج}}$ ، $\overline{\text{اب}}$ کا عمُودی ناصِف ہے ۔ (2) اب کے عمُودی ناصِف پر کوئی نُقطہ ق لیں اور $\overline{\text{قا}}$ اور $\overline{\text{ق ب}}$ کو ملائیں تو $\triangle^{\text{ن}}$ اج ق ، ب ج ق میں $\overline{\text{اج}} = \overline{\text{ب ج}}$ $\overline{\text{ج ق}}$ مشترک ہے ا$\hat{\text{ج}}$ق = ب$\hat{\text{ج}}$ق = 90° $\therefore$ $\triangle$ اج ق $\equiv$ $\triangle$ ب ج ق پس $\overline{\text{قا}} = \overline{\text{ق ب}}$



اِس لیے ہر نُقطہ جو ا اور ب سے مُساوی الفاصِلہ ہے وُہ $\overline{اب}$ کے عمُودی ناصِف پر واقع ہے اور ہر نقطہ جو عمُودی ناصِف پر واقع ہے وہ ا اور ب سے مُساوی الفاصِلہ ہے - لہٰذا $\overline{اب}$ کا عمُودی ناصِف مطلُوبہ طریقُ النّقاط ہے ؏

مشق 35

1 مُثلّث بناؤ جس کے اضلاع 2 ، $2\frac{1}{2}$ ، 3 اِنچ ہوں اور ایک ایسا نقطہ معلُوم کرو جو تینوں کونوں سے مُساوی الفاصِلہ ہو ؏

2 ایسا مُثلّث اب ج بناؤ کہ $\overline{اب}$ = ۵ء۱ گ ، $\overline{ب ج}$ = 2 گ ، $\overline{ج ا}$ = 2 گ ایسا نقطہ معلُوم کرو جو ا ، ب ، ج سے مُساوی الفاصِلہ ہو یہ فاصِلہ ناپو ؏

3 اب ج ایک مُثلّث ہے $\overline{اب}$ ، $\overline{ب ج}$ کے عمُودی ناصِف نقطہ م پر ملتے ہیں ثابت کرو $\overline{م ا}$ = $\overline{م ب}$ = $\overline{م ج}$ ؏

4 سوال نمبر 3 میں م کو مرکز مان کر م ا کی دُوری سے دائرہ کھینچو - بتاؤ اس دائرے کی کیا خصُوصیات ہیں ؟

5 ایسا نقطہ معلُوم کرو جو تین دِیے ہُوئے نقاط سے مُساوی الفاصِلہ ہو ؏

6 دِیے ہُوئے قاعدہ $\overline{ب ج}$ پر ایک مُتساوی السّاقین اب ج مُثلّث بناؤ اور ا کا طریقُ النّقاط معلُوم کرو ؏

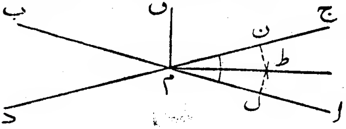
7 دو نقاط ایسے معلُوم کرو جو ا اور ب سے مُساوی الفاصِلہ ہوں اور کسی دِیے ہُوئے خط سے اُن کے فاصلے پر واقع ہوں ؏

8 اب ج د ایک چوکور ہے - جس میں $\overline{اب}$ = $\overline{ب ج}$ ، $\overline{اد}$ ، $\overline{ج د}$ کے عمُودی ناصِف ع پر ملتے ہیں ب کو ع سے ملایا گیا ہے - ثابت کرو $\overline{ب ع}$ زاویہ اب̂ج کا ناصِف ہے ؏

مسئلہ 36

(اثباتی)

اُس نُقطے کا طریق جو دو مُتقاطع خطوط سے مُساوی الفاصلہ ہو وُہ خط ہوتے ہیں جو مُتقاطع خطوط کے درمیانی زاویوں کی تنصیف کرتے ہیں



مفرُوض	فرض کرو اب، ج د دو خط ہیں جو ایک دُوسرے کو نقطہ م پر کاٹتے ہیں ؛
مطلُوب	(۱) اگر ط ایسا نقطہ ہو کہ اُس کے عمُود طل، طن جو دیے ہوئے خطوط پر کھینچے جائیں باہم برابر ہوں تو طم زاویہ ا م ج کا ناصف ہے ؛ (2) اگر کوئی نقطہ ط زاویہ ا م ج کے ناصف پر واقع ہو تو عمُود طل = عمُود طن
ثبُوت	(۱) دیا ہُوا ہے کہ طل = طن قائم الزّاویہ مُثلّثان ل م ط، ن م ط میں ∵ { طل = طن ، وتر طم مُشترک ہے } ∴ دونوں مُثلّث منطبق ہیں ∴ ل م̂ ط = ن م̂ ط یعنی طم زاویہ ا م̂ ج کا ناصف ہے (2) دیا ہُوا ہے کہ ط زاویہ ا م̂ ج کے ناصف طم پر واقع ہے قائم الزّاویہ مُثلّثان طم ل، ط م ن میں ∵ { ط م̂ ل = ط م̂ ن (دیا ہُوا ہے) ، وتر طم مُشترک ہے } لہٰذا دونوں مُثلّث منطبق ہیں۔ اس لیے طل = طن یعنی ط دونوں خطوط سے مُساوی الفاصلہ ہے۔

ہر نقطہ جو دو مُتقاطِع خطُوط سے مُساوی الفاصِلہ ہے وہ اُن کے درمیانی زاویے کے ناصِف پر واقع ہے اور ہر نُقطہ جو ایسے ناصِف پر واقع ہے وُہ دِیے ہوئے خطُوط سے مُساوی الفاصِلہ ہے لہٰذا زاویے کا ناصِف مطلُوبہ طریقُ النّقاط ہے۔ اِسی طرح زاویہ ج م ب کا ناصِف بھی طریقُ النّقاط ثابت کیا جا سکتا ہے۔ اِس لِیے طریقُ النّقاط وُہ دونوں ناصِف ہیں جو خطُوط کے درمیانی زاویوں کی تنصِیف کرتے ہیں ؎

مشق 36

1 مثلّث بناؤ جِس کے اضلاع 4، 5، 7 اِنچ ہیں۔ ایسا نُقطہ معلُوم کرو جو تینوں اضلاع سے مُساوی الفاصِلہ ہو (دیکھو مسئلہ نمبر 37)

2 مثلّث بناؤ جِس کے اضلاع 7.4، 4.5، 6.5 سم ہیں۔ اور ایسا نُقطہ معلُوم کرو جو تِینوں اضلاع سے مُساوی الفاصِلہ ہو یہ فاصِلہ بھی معلُوم کرو ؎

3 مثلّث بناؤ جِس کے اضلاع 5، 6، 7 سم ہوں۔ ایسا نقطہ معلُوم کرو جو تینوں اضلاع سے مُساوی الفاصِلہ ہو۔ نقطے سے ایک ضِلع پر عمُود کھینچو پھر نقطے کو مرکز مان کر عمُود کی دُوری سے دائرہ کھینچو اور اِس دائرے کی خصُوصیّات بیان کرو ؎

4 ا ب ج ایک مثلّث مُتساوی الاضلاع ہے جِس کا ضِلع 5 سم ہے۔ وُہ نقاط معلُوم کرو جِن کا فاصِلہ ب ج کے نقطۂ وسطی سے 3 سم ہے۔ اور جو ا ب، ا ج سے مُساوی فاصلے پر ہیں ؎

5 مثلّث ا ب ج بناؤ جِس میں ب ج = 5 سم، ج ا = 6 سم اور ا ب = 7 سم ہو۔ ب ج میں کوئی نقطہ ک لو جو ا ب اور ا ج سے مُساوی الفاصِلہ ہو یہ فاصلے اور ک ب، ک ج کی لمبائیاں ناپو ؎

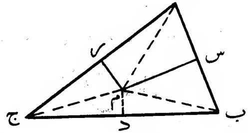
6 مثلّث دیا ہُؤا ہے وُہ نقطہ معلُوم کرو جو دو اضلاع سے مُساوی الفاصِلہ ہو اور تیسرے ضِلع سے ایک معلُومہ فاصِلے پر ؎

7 ایک خطِ قاطع دو مُتوازی خطُوط کو کاٹتا ہے اگر درمیانی ٹکڑے کا نُقطۂ وسطی لیا جائے تو ثابت کرو کہ اُس کا طریقُ النّقاط ایک خطِ مُستقیم ہے ؎

مسئلہ 37

(اثباتی)

مثلث کے اضلاع کے عمودی ناصف متراکز (یعنی ہم نقطہ) ہوتے ہیں



مفروض	فرض کرو △ اب ج کے اضلاع کے نقاطِ وسطی د ، ر ، س دیئے ہوئے ہیں ۞
مطلوب	د ، ر ، س پر کے عمود ہم نقطہ ہوں گے ۞
عمل	عمود ر م ، س م کھینچو۔ جو نقطہ م پر ملیں۔ م د کو ملاؤ م د تیسرا عمودی ناصف ہوگا ۞
ثبوت	نقطہ م ضلع اب کے عمودی ناصف پر واقع ہے ۞ ∴ م ا = م ب ۞ اسی طرح م ضلع ا ج کے عمودی ناصف پر واقع ہے ۞ ∴ م ا = م ج لہٰذا م ب = م ج ∴ نقطہ م ضلع ب ج کے عمودی ناصف پر واقع ہے ۞ یعنی م د خط ب ج کا عمودی ناصف ہے ۞ پس تینوں عمودی ناصف نقطہ م پر ملتے ہیں ۞ (فھوالمطلوب)

دائرۂ مُحیط

مسئلۂ بالا کی شکل میں نُقطہ م مثلّث کے دائرۂ مُحیط کا مرکز ہے۔ دُوسرے لفظوں میں اگر م کو مرکز مان کر اور م ا کی دُوری سے دائرہ کھینچا جائے تو یہ مثلّث کے تینوں راسوں سے گزُرے گا (کیونکہ م ا = م ب = م ج) اِس کو دائرۂ مُحیط یا بیرُونی دائرہ کہتے ہیں۔ م مرکزِ مُحیط یا بیرُونی دائرے کا مرکز کہلاتا ہے۔ اور م ا دائرۂ مُحیط کا نِصف قطر۔

مشق 37

1 مسئلہ 37 کی شکل بناؤ۔ جب ب ا ج زاویہ مُنفرجہ ہو۔

2 مسئلہ 37 کی شکل بناؤ۔ جب ب ا ج زاویہ قائمہ ہو۔
دونوں صُورتوں میں م کہاں واقع ہوگا؟

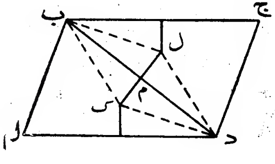
3 مثلّث کے گرد دائرۂ مُحیط بناؤ۔

4 مسئلہ 37 کی شکل میں ثابت کرو ب م ج = 2 ب ا ج۔

5 مثلّث ا ب ج میں زاویہ ا = 90° ثابت کرو ا ب اور ا ج کے عمُودی ناصف ب ج کو وسطی نقطے پر ملتے ہیں۔

6 مُتساوی السّاقین مثلّث کا مرکزِ مُحیط اُس کے ایک اِرتفاع پر واقع ہوگا۔

7 ا ب ج د ||ع ہے ک، ل △ن ا ب د، ب ج د کے مرکزِ مُحیط ہیں ثابت کرو ک ب ل د مُعیّن ہے۔

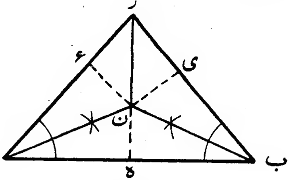


8 مسئلہ 37 کی شکل میں ا سے م ب اور م ج کے متوازی خطوط کھینچو۔ اسی طرح ب سے م ا اور م ج کے مُتوازی اور ج سے م ب اور م ا کے مُتوازی ثابت کرو کہ یہ چھ خط ایک ایسا مُسدّس بنائیں گے جس کے اضلاع اور مُتقابلہ زاویے برابر ہوں گے۔

مسئلہ 38

(اثباتی)

مثلّث کے زاویوں کے ناصف متراکز (یعنی ہم نقطہ) ہوتے ہیں۔



مفروض	فرض کرو مثلّث اب ج میں ب ن زاویہ ب کا اور ج ن زاویہ ج کا ناصف ہے اور دونوں نقطہ ن پر ملتے ہیں۔
مطلوب	نقطہ ن زاویہ ا کے ناصف پر واقع ہوگا۔
عمل	ن سے اضلاعِ مثلّث پر عمود ن ہ، ن ع، ن ی ڈالو۔
ثبوت	∵ ن زاویہ ب کے ناصف پر واقع ہے۔ ∴ ن ہ = ن ی اسی طرح چونکہ ن زاویہ ج کے ناصف پر ہے۔ ∴ ن ہ = ن ع لہٰذا ن ع = ن ی پس نقطہ ن زاویہ ا کے ناصف پر واقع ہے۔ (فہو المطلوب)

نتیجۂ صریح: نقطہ ن مثلّث اب ج کا اندرونی مرکز ہے دوسرے لفظوں میں اگر ن کو مرکز مان کر ن ہ کی دوری سے دائرہ کھینچیں تو یہ دائرہ نقاط ع، ی میں سے گزرے گا اور تینوں اضلاع کو مس کرے گا اس دائرے کو اندرونی دائرہ کہتے ہیں اور ن ہ = ن ع = ن ی اندرونی نصف قطر کہلاتے ہیں۔

مشق 38

1 مسئلہ 38 کی شکل میں ثابت کرو کہ △ ن ب ہ اور ن ب ی منطبق ہیں۔ اِسی طرح △ ن ج ہ اور ن ج ع منطبق ہیں اور △ ن اع، ن ای منطبق ہیں ؂

2 ثابت کرو ای = ½ (اب — ب ج + ج ا)

ب ہ = ½ (اب + ب ج — ج ا)

ج ع = ½ (ب ج + ج ا — اب)

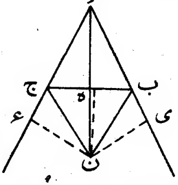
3 اگر ص = ½ (ط ا + ط ب + ط ج)، △ = مثلث کا رقبہ، تو ثابت کرو

(1) اع = ص — ط ا

(2) ن ہ = ن ع = ن ی = △/ص

(3) ای + ب ہ + ج ع = ص

4 مسئلے کی شکل میں ثابت کرو کہ ن، ہ ع ی کا مرکزِ محیط ہے ؂



5 مثلث اب ج کے اضلاع اب، اج کو بڑھاؤ۔ اور ثابت کرو کہ ا کا اندرُونی ناصف اور ب، ج کے بیرُونی ناصف ہم نقطہ ہیں ؂

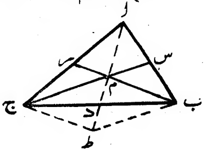
تعریف: ایک اندرُونی زاویہ اور دو بیرُونی زاویوں کے ناصف ہم نقطہ ہوتے ہیں۔ ایسے تین نقطے ملیں گے اُن کو خارجی مرکز کہتے ہیں۔ اُوپر کی شکل میں ن △ اب ج کا ایک خارجی مرکز ہے اگر ن کو مرکز لے کر ن ہ کی دُوری سے دائرہ کھینچیں تو وُہ اب، ب ج، ج ا کو ی، ہ، ع پر مس کرے گا۔ اس کو خارجہ دائرہ کہتے ہیں ؂

6 مثلث کا ہر راس اندرُونی مرکز اور مقابل کا خارجی مرکز ہم خط یعنی ایک خطِ مستقیم پر واقع ہوتے ہیں ؂

7 مثلث کے خارجی مرکز دو دو کر کے راسوں کے ساتھ ہم خط ہوتے ہیں ؂

مسئلہ 39

مثلّث کے وسطانیے متراکز (اثباتی) (یعنی ہم نُقطہ) ہوتے ہیں ؂



مفرُوض	فرض کرو △ اب ج کے وسطانیے ب ر، ج س نُقطہ م پر مُتقاطع ہوتے ہیں
مطلُوب	تیسرا وسطانیہ بھی نُقطہ م میں سے گزُرے گا ؂
عمل	ا م کو ملاؤ ؂ ا م کو بڑھاؤ کہ وُہ ب ج کو د پر قطع کرتا ہُوا گزُرے ؂ ب سے ب ط ∥ ج س کھینچو جو ا د کو نقطہ ط پر ملے ط ج کو ملاؤ ؂
ثبوُت	مثلّث ا ب ط میں ∵ س م ∥ ب ط اور س وسطی نُقطہ ہے ا ب کا ∴ م وسطی نُقطہ ہے ا ط کا ؂ اب م اور ر وسطی نقاط ہیں ا ط اور ا ج کے ∴ م ر ∥ ہے ط ج کے یعنی ب م ر ∥ ج ط کے ؂ لہٰذا ب م ج ط ∥ع ہے ؂ لیکن ∥ع کے وَتر ایک دُوسرے کے ناصف ہوتے ہیں ؂ ∴ ب د = د ج اور ا م د وسطانیہ ہے ؂ پس ہر سہ وسطانیے ہم نُقطہ ہیں ؂ (فہوَ المطلُوب)

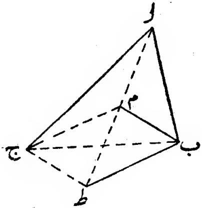
نتیجۂ صریح (1) نقطہ م ہر وسطانیہ کا نقطۂ تثلیث ہے ۔

ثبوت : م د = د ط کیونکہ وتر م ط کی تنصیف د پر ہوتی ہے ۔

نیز ا م = م ط کیونکہ م خط ا ط کا وسطی نقطہ ہے ۔

∴ ا م = 2 م د پس ا م : م د :: 2 : 1

نتیجۂ صریح (2) تین وسطانیے معلوم ہوں تو مثلث بناؤ۔



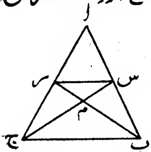
عمل : مثلث م ط ب بناؤ جس کے اضلاع معلومہ وسطانیوں کے $\frac{2}{3}$ ہوں ب ط ج م ||ع تکمیل کرو۔ ط م کو ا تک بڑھاؤ تا آنکہ ط م = م ا ، ا ب اور ا ج کو ملاؤ ا ب ج مطلوبہ مثلث ہوگا۔

مشق 39

1 مثلث بناؤ جس کے اضلاع 5، 6، 7 سم ہوں۔ اُس کا مرکزِ ثقل دریافت کرو۔

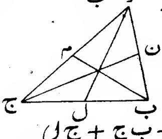
2 مثلث بناؤ جس کے وسطانیے 3، 4، 5 سم ہوں۔

3 مسئلہ 39 کی شکل میں ثابت کرو کہ △ ا ب ج اور △ د ر س دونوں کا مرکزِ ثقل م ہی ہے۔



4 اگر مثلث کے دو وسطانیے برابر ہوں تو ثابت کرو مثلث متساوی الساقین ہے۔

5 ثابت کرو کہ مثلث کے دو وسطانیوں کا مجموعہ تیسرے وسطانیے سے بڑا ہوگا۔



6 مثلث ا ب ج کے اضلاع ب ج ، ج ا اور ا ب کے نقاطِ تنصیف بالترتیب ل، م، ن ہیں ثابت کرو کہ :-

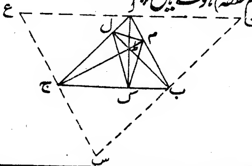
4 (ا ل + ب م + ج ن) > 3 (ا ب + ب ج + ج ا)

7 مثلث میں سب سے لمبے ضلع کی تنصیف سب سے چھوٹا وسطانیہ کرتا ہے۔

مسئلہ 40

(ثبانی)

مثلّث کے نقاطِ راس سے جو عمود مقابل کے ضلعوں پر کھینچے جائیں وہ متراکز (یعنی ہم نقطہ) ہوتے ہیں ؛



مفروض	فرض کرو △ ا ب ج میں اک ، ب ل ، ج م نقاطِ راس سے مقابل کے ضلعوں پر عمود ہیں ؛
مطلوب	اک ، ب ل ، ج م ہم نقطہ ہوں گے ؛
عمل	ا ، ب ، ج سے خطوط ف ع ، س ف ، ع س کھینچو جو بالترتیب ب ج ، ج ا ، ا ب کے ∥ ہوں ؛
ثبوت	ا ب ج ع متوازی الاضلاع ہے ∴ ا ع = ب ج اسی طرح ا ج ب ف متوازی الاضلاع ہے ∴ ا ف = ب ج ∴ ا ع = ا ف ، لہٰذا ا نقطہ وسطی ہے ع ف کا لیکن ف ع اور ب ج متوازی ہیں اور اک عمود ہے ب ج پر لہٰذا اک خط ف ع کا عمودی ناصف ہے اسی طرح ب ل خط س ف کا عمودی ناصف ہے اور ج م خط ع س کا عمودی ناصف ہے مگر کسی مثلّث کے عمودی ناصف ہم نقطہ ہوتے ہیں لہٰذا اک ، ب ل ، ج م جو مثلّث ع ف س کے عمودی ناصف ہیں یقیناً ہم نقطہ ہیں ؛ (فہوالمطلوب)

تعریف (۱) مثلّث کے نقاط راس سے جو عمود مقابل کے ضلعوں پر کھینچے جاتے ہیں وہ مثلّث کے اِرتفاع کہلاتے ہیں ؛

(۲) راسی عمودوں کا نقطۂ تقاطع مرکزِ عمودی کہلاتا ہے ؛

(۳) ک ، ل ، م پائے اِرتفاع کہلاتے ہیں اور مثلّث ک ل م کو **مثلّث پائین** (یا پیڈل △) کہتے ہیں ؛

مشق 40

1 مسئلہ نمبر 40 کو ثابت کرو جب زاویہ ا قائمہ ہو ؛

2 〃 〃 〃 〃 〃 ا منفرجہ ہو ؛

3 ثابت کرو کہ △ ا ب ج کا مرکزِ محیط △ د ر س کا مرکزِ عمودی ہوگا - جہاں د ، ر ، س اضلاع مثلّث کے نقاط وسطی ہیں ؛

4 مسئلہ نمبر 40 کی شکل میں ثابت کرو ب ط ج = $180°$ - ب ا ج

5 〃 〃 〃 〃 〃 کہ ج ط ل = ا ،

ج ط ک = ب اور ب ط ک = ج ؛

6 بناؤ قائم الزّاویہ △ کا مرکزِ عمودی کہاں واقع ہوتا ہے ؟

7 △ ط ب ج کا مرکزِ عمودی معلوم کرو (مسئلہ 40 کی شکل میں)

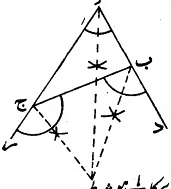
8 △ ا ب ج بناؤ - جس میں ا ب = ۲" ، ب ج = ۳" اور ج ا = ۲.۵" ہوں اور اِس میں مثلّث پائین دکھاؤ ؛

9 ا ب ج ایک مثلّث بناؤ - جس کا ضلع ا ب = ۳ سم ، ب ج = ۴ سم اور ج ا = ۲ سم ہو - اِس کے گرد ایک مثلّث ط ع ف ایسا بناؤ جس کے اندر ا ب ج مثلّث پائین ہو ؛

10 ایک △ ا ب ج کا مرکزِ عمودی م ہے - اگر ا م خارج شدہ عمود مثلّث کے ضلع ب ج کو ل پر اور اِس کے دائرۂ محیط کو ن پر کاٹے تو ناپ کر بتاؤ کہ م ل = ل ن ؛

مُتفرّق سوالات 2

1 مثلّث بناؤ جس کے اضلاع 4 سم، 8 سم، 9 سم کے برابر ہوں۔ سب سے بڑے زاویے کی تنصیف کرو اور اُن حصص کو ناپو جن میں یہ ناصف مقابل کے ضلع کو تقسیم کرتا ہے ۔



2 △ اب ج بناؤ۔ $\overline{\text{اب}}$، $\overline{\text{اج}}$ کو د، س تک بڑھاؤ۔ زوایائے ا، ج ب̂ د، ب ج̂ س کی تنصیف کرو (دیکھو یہ تینوں ناصف ہم نقطہ ہیں)

3 دِیے ہوئے زاویہ (مثلاً °72) کو دو حصّوں میں تقسیم کرو۔ اِس طرح کہ ایک حصّہ دُوسرے کا $\frac{1}{7}$ ہو ۔

4 زاویہ ب اَ̂ ج = °60 کھینچو۔ $\overline{\text{اب}}$ = 3 سم، $\overline{\text{اج}}$ = 4 سم کاٹو۔ $\overline{\text{ب ج}}$ کو مِلاؤ۔ △ اب ج کے عمُودی ناصف کھینچو اور ثابت کرو کہ وُہ ہم نقطہ ہیں ۔

5 سوال نمبر 4 میں مثلّث کے وسطانیے کھینچو اور ثابت کرو کہ وہ ہم نُقطہ ہیں ۔

6 $\overline{\text{اب}}$ پر مُتساوی السّاقین مثلّث بناؤ۔ جس کا ہر مُساوی ضلع $\overline{\text{اب}}$ سے دُگنا ہو ۔

7 ||ع کے ضلعے $\overline{\text{اب}}$ اور $\overline{\text{ب ج}}$ دیے ہُوئے ہیں۔ متوازی خطوط یہ کھینچے بغیر شکل مکمّل کرو ۔

8 مثلّث اب ج بناؤ۔ جس کے اضلاع $\overline{\text{اب}}$، $\overline{\text{ب ج}}$، $\overline{\text{ج ا}}$ بالتّرتیب 2.1″، 3.8″، 4.5″ ہیں۔ زاویہ ا کی تنصیف کرو۔ نُقطہ ب میں سے وسطانیہ کھینچو۔ نیز ج سے $\overline{\text{اب}}$ پر عمُود ڈالو ۔

9 مثلّث کے اضلاع 2، 3، 4 سم کے برابر ہیں۔ اس کے سب سے لمبے اِرتفاع کا طُول ملی میٹروں میں بتاؤ ۔

10 مثلّث بناؤ جس کے اضلاع 4 سم، 5 سم، 6 سم کے برابر ہیں۔ مثلّث کے اندرُونی اور بیرُونی زوایا کی تنصیف کرو اور ثابت کرو کہ ہر زاویے کے اندرُونی اور بیرُونی ناصف علی القوائم ہیں ۔

11 △ ا ب ج بناؤ جس کے اضلاع 3، 4، 5 سم ہوں - ایک اور مثلث بناؤ جس کے اضلاع کے وسطی نقاط ا، ب، ج ہوں ۔

12 ا، ب دو نقاط 4 سم کے فاصلے پر ہیں - ایک نقطہ ط ایسا معلوم کرو کہ $\overline{طا} = \overline{طب} = 2\frac{1}{2}$ سم - اگر $\overline{اب}$ کا وسطی نقطہ م ہو - تو $\overline{طم}$ کا طول معلوم کرو ۔

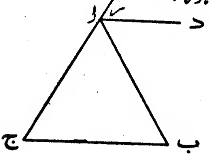
13 مثلث بناؤ جس کے اضلاع 2.4″، 3.2″ اور 4.9″ ہوں -

(1) سب سے چھوٹے زاویے کی پیمائش کرو ۔

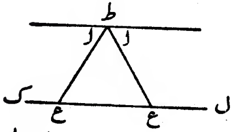
(2) سب سے بڑے زاویے کے ناصف کا طول ناپو ۔

(3) سب سے چھوٹے ضلع پر گرائے ہوئے راسی عمود کا طول ناپو ۔

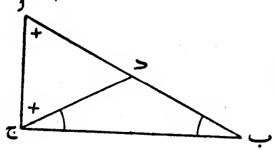
14 متساوی الساقین مثلث کے بیرونی راسی زاویے کی تنصیف کرو - اور ثابت کرو کہ ناصف قاعدے کے متوازی ہوگا ۔



15 متساوی الساقین مثلث کے نقطہ راس سے قاعدے کے متوازی خط کھینچو - اور ثابت کرو کہ یہ خط بیرونی راسی زاویے کا ناصف ہے ۔

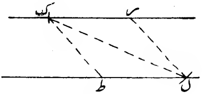


16 نقطہ ط سے خط کھینچو - جو دیے ہوئے خط ک ل کے ساتھ ا کے برابر زاویہ بنائیں اس کے دو حل ہیں - کیوں؟

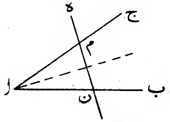


17 ثابت کرو کہ قائم الزاویہ مثلث کو دو متساوی الساقین مثلثوں میں تقسیم کیا جا سکتا ہے ۔

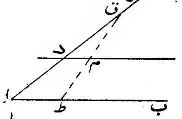
18 دو متوازی خطوط پ ک اور



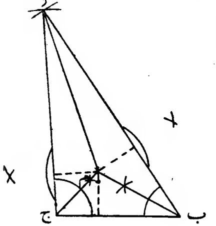
ل دو نقطے لیے گئے ہیں۔ اُن میں سے ایسے خطوط کھینچو جو متوازی خطوط کے ساتھ ایک معیّن بنائیں ٭



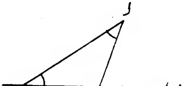
19 کسی نقطہ ہ سے ایک خط کھینچو جو ب اَ ج کے بازوؤں اَ ب اور اَ ج کے ساتھ مساوی زاویے بنائے ٭



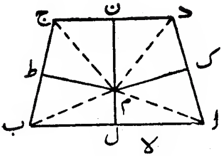
20 زاویہ ب اَ ج کے اندر کوئی نقطہ م لیا گیا ہے۔ م میں سے ایک خط ق م ط کھینچو جو زاویے کے بازوؤں کو ط، ق پر ملے۔ اس طور پر کہ ط م = ق م ٭



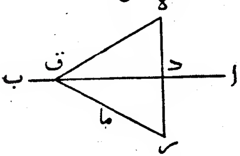
21 ایک مثلث اَ ب ج بناؤ جس کے اضلاع ب ج = 3 سم، ج اَ = 5 سم، اَ ب = 6 سم ہوں۔ زاویے ب اور ج کے اندرونی ناصف نقطہ م پر ملتے ہوئے کھینچو۔ زاویہ ب اَ م اور زاویہ ج اَ م کو ناپو۔ نقطہ م کے اَ ب اور ب ج سے عمودی فاصلے ناپو ٭



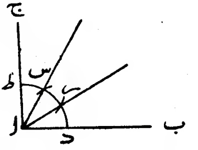
22 اَ کوئی نقطہ ہے۔ ب دوسرا نقطہ ہے جو کسی دیے ہوئے خط پر واقع ہے۔ اس سے دیے ہوئے خط تک ایک خط اَ ک کھینچو۔ اس طرح پر کہ اَ ک اور ک ب کا مجموعہ کسی دیے ہوئے طول کے مساوی ہو جو اَ ب سے بڑا ہے ٭



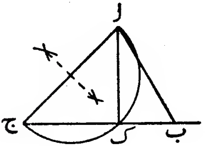
23 ایک ایسا نُقطہ معلوم کرو جو کِسی مُتساوی السّاقین منحرف کے کونوں سے یکساں فاصلے پر ہو ۔



24 خط ا ب کی مُخالف جہتوں میں دو نقاط لا اور ما ہیں ۔ خط ا ب میں ایک ایسا نقطہ ق معلوم کرو کہ لا ق ا = ما ق ا ۔



25 زاویہ قائمہ ب ا ج کی تثلیث کرنے کے لِیے مُندرجۂ ذیل ترکیب ثابت کرو ۔ ا کو مرکز مان کر کِسی مُناسب دُوری سے قوس کھینچو ۔ جو ا ب کو د پر اور ا ج کو ط پر کاٹے د اور ط کو بالتّرتیب مرکز مان کر اُسی دُوری سے قوسیں کھینچو جو قوس د ط کو نقاط س، ر پر کاٹیں ۔ ا س، ا ر کو مِلاؤ ۔



26 مُثلّث ا ب ج کے راسی نُقطہ ا سے ب ج پر ارتفاع بنانے کی مندرجۂ ذیل ترکیب کا ثبوت دو:- ا ج کو قطر مان کر دائرہ کھینچو ۔ جو ب ج کو ک پر قطع کرے ۔ ا ک مطلوبہ اِرتفاع ہو گا ۔

27 قائم الزّاویہ مثلّث بناؤ ۔ جِس کا وَتر 1·5″ ہو اور باقی اِضلاع کا مجموعہ 2·1″ ہو ۔
28 قائم الزّاویہ 〃 〃 〃 1·3″ 〃 〃 〃 1·7″ 〃 ۔
29 قائم الزّاویہ 〃 〃 〃 5 سم 〃 〃 کا فرق ایک سم ہو ۔
30 قائم الزّاویہ 〃 〃 〃 2·6″ 〃 〃 〃 1·4″ ہو ۔
31 مُتساوی السّاقین قائم الزّاویہ مثلّث بناؤ ۔ جِس کے وَتر اور ایک ضلع کا مجموعہ 2″ ہو ۔

32 مُتساوی السّاقین قائم الزّاویہ مثلّث بناؤ۔ جِس کے وَتر اور ایک ضلع کا مجموعہ 5 سم ہو ۔

33 قائم الزّاویہ مثلّث بناؤ۔ جِس کا احاطہ 3″ اور ایک زاویہ 60° ہو ۔

34 قائم الزّاویہ مثلّث بناؤ ۔ جِس کا اِحاطہ 6 سم اور ایک زاویہ 50° ہو ۔

35 قائم الزّاویہ مثلّث بناؤ۔ جِس کا وَتر 5 سم اور زاویہ قائمہ سے وَتر پر کا عمُود 1.8 سم ہو ۔

36 قائم الزّاویہ مثلّث بناؤ۔ جِس کا وَتر 2.2″ اور زاویہ قائمہ سے وَتر پر کا عمُود 9.″ ہو ۔

37 مُتساوی السّاقین مثلّث بناؤ۔ جِس کا قاعدہ ایک اِنچ اور راسی زاویہ 50° ہو ۔

38 مُتساوی السّاقین مثلّث بناؤ۔ جِس کا ضلع 3 سم اور راسی زاویہ 45° ہو ۔

39 مُتساوی السّاقین مثلّث بناؤ۔ جِس کا اِرتفاع = 2 سم اور راسی زاویہ 60° ہو ۔

40 مُتساوی السّاقین مثلّث بناؤ۔ جِس کا اِرتفاع = 8.″ اور راسی زاویہ 135° ہو ۔

41 مُتساوی السّاقین مثلّث بناؤ۔ جِس کا ارتفاع = 1″ اور قاعدے پر کا زاویہ 45° ہو ۔

42 مُتساوی السّاقین مثلّث بناؤ۔ جِس کا اِرتفاع 3 سم اور قاعدے پر کا زاویہ 30° ہو ۔

43 مُتساوی السّاقین مثلّث بناؤ۔ جِس کا اِرتفاع 1″ ہو۔ جِس کا قاعدہ معلُومہ خط اب پر واقع ہو اور جِس کے مُساوی اضلاع دو نقاط ک، ل میں سے گزُریں جو خط اب سے بقدر 3.″ اور 5.″ اُوپر واقع ہیں ۔

44 مُتساوی السّاقین مثلّث بناؤ۔ جِس کا ارتفاع 3 سم، جِس کا قاعدہ معلُومہ خط اب پر واقع ہو اور جِس کے مُتساوی اضلاع دو نقاط ک، ل میں سے گزُریں جو خط اب سے بقدر ایک سم، 2 سم اُوپر واقع ہیں ۔

45 متساوی الساقین مثلث بناؤ۔ جس کا قاعدہ = ″1.2 اور ایک متساوی ضلع اور ارتفاع کا مجموعہ ″2 ہو۔

46 متساوی الساقین مثلث بناؤ۔ جس کا قاعدہ 2.5 سم اور ایک متساوی ضلع اور ارتفاع کا مجموعہ 5 سم ہو۔

47 متساوی الساقین مثلث بناؤ۔ جس کا قاعدہ ″1.8 اور ایک ضلع اور ارتفاع کا فرق ″0.6 ہو۔

48 متساوی الساقین مثلث بناؤ۔ جس کا قاعدہ 3.7 سم اور ایک ضلع اور ارتفاع کا فرق 1.2 سم ہو۔

49 متساوی الاضلاع مثلث بناؤ۔ جس کا ارتفاع ″1 ہو۔

50 متساوی الاضلاع 〃 〃 〃 〃 2.5 سم ہو۔

51 مثلث بناؤ۔ جس کا ارتفاع ایک انچ اور قاعدے پر کے زاویے 60°، 40° ہوں۔

52 مثلث بناؤ۔ جس کا ارتفاع 3 سم اور قاعدے پر کے زاویے 70°، 50° ہوں۔

53 مثلث بناؤ۔ جس کا ارتفاع ″1 اور قاعدے پر کے دو اضلاع ″1.5، ″1.8 ہوں۔

54 مثلث بناؤ۔ جس کا ارتفاع 3 سم اور دو اضلاع 4 سم اور 5 سم ہوں۔

55 مثلث بناؤ۔ جس کا احاطہ ″4 اور قاعدے پر کے زاویے 45°، 60° ہوں۔

56 مثلث بناؤ۔ جس کا احاطہ 8 سم اور قاعدے پر کے زاویے 40°، 80° ہوں۔

57 مثلث بناؤ۔ جس کا قاعدہ ″1 اور باقی اضلاع کا مجموعہ ″3 اور قاعدے پر کا ایک زاویہ 45° ہو۔

58 مثلث بناؤ۔ جس کا قاعدہ 3 سم اور باقی اضلاع کا مجموعہ 7 سم اور قاعدے پر کا ایک زاویہ 50° ہو۔

59 مثلث بناؤ۔ جس کا قاعدہ ″1.2 اور باقی اضلاع کا فرق ″1.6 اور قاعدے پر کا ایک زاویہ 30° ہو۔

60 مثلث بناؤ۔ جس کا قاعدہ 3 سم اور باقی اضلاع کا فرق ایک سم اور قاعدے پر کا ایک زاویہ 50° ہو۔

61 مثلث بناؤ جس کا قاعدہ ۱ً اور قاعدے کے زاویوں کا فرق °30 اور باقی اضلاع کا فرق ۰٫6ً ہو۔

62 مثلث بناؤ جس کا قاعدہ 3 سم اور قاعدے کے زاویوں کا فرق °45 اور باقی اضلاع کا فرق 1.2 سم ہو۔

63 مثلث بناؤ جس کا قاعدہ 1.2ً اور قاعدے کے زاویوں کا فرق °30 اور باقی اضلاع کا مجموعہ 3ً ہو۔

64 مثلث بناؤ جس کا قاعدہ 3 سم اور قاعدے کے زاویوں کا فرق °45 اور باقی اضلاع کا مجموعہ 7 سم ہو۔

65 مثلث بناؤ جس کا قاعدہ 1.4ً، ارتفاع 1ً اور قاعدے کی تنصیف کرنے والا وسطانیہ 1.2ً ہو۔

66 مثلث بناؤ جس کا قاعدہ = 4 سم، ارتفاع = 3 سم اور قاعدے کی تنصیف کرنے والا وسطانیہ = 3.5 سم ہو۔

67 مثلث اب ج بناؤ جس کا ارتفاع اک = 1ً، اب − ب ک = 0.6ً اور اج − ک ج = 0.4ً

68 مثلث اب ج بناؤ جس کا ارتفاع اک = 3 سم، اب − ب ک = ایک سم اور اج − ک ج = 1.2 سم

69 مثلث بناؤ جس کے اضلاع 1.2ً اور 1.5ً ہوں اور ان کے نقطۂ تقاطع سے گزرنے والا وسطانیہ 1.1ً ہو۔

70 مثلث بناؤ جس کے اضلاع 3 سم اور 4 سم اور ان کے نقطۂ تقاطع سے گزرنے والا وسطانیہ 2.5 سم ہو۔

71 مثلث بناؤ جس کا قاعدہ 1ً اور قاعدے کے سروں میں سے گزرنے والے وسطانیے 1.2ً، 1.5ً ہوں۔

72 مثلث بناؤ جس کا قاعدہ 2.5 سم اور قاعدے کے سروں میں سے گزرنے والے وسطانیے 2.4 سم اور 3 سم ہوں۔

73 مثلث بناؤ جس کے وسطانیے 1.6، 2ً اور 2.1ً ہوں۔

74 مثلث بناؤ جس کے وسطانیے 3.5 سم، 4 سم اور 4.5 سم ہوں۔

چار ضلعی شکل اب ج د بناؤ جن کے امتداد حسب ذیل ہیں:-

75 اب = 1.5ً، ب ج = 1.7ً، ج د = 1.2ً، دا = 1.4ً

اج = 1.6" ۔

76 اب = 3.2 سم، بج = 3.5 سم، جد = 3.8 سم، دا = 3 سم، اج = 4 سم ۔

77 اب = 1.5"، بج = 1.4"، دا = 1"، اˆ = 45°، بˆ = 60° ۔

78 اب = 3 سم، بج = 1.8 سم، دا = 2.6 سم، اˆ = 60°، بˆ = 75° ۔

79 اب = 2.5 سم، بج = 3 سم، جد = 2 سم، دا = 3.2 سم اور بˆ = 120° ۔

80 اب = 2"، بج = 2.5"، اد = 1.8"، بد = 3"، ب جˆ د = 135° ۔

81 مُربّع بناؤ جس کے وتر اور دو ضلعوں کا مجموعہ 2.5" ہو ۔

82 " " " " 6 سم ہو ۔

83 " " " . ایک ضلع کا فرق .6" ہو ۔

84 " " " " " " 1.5" ہو ۔

85 مُستطیل بناؤ جس کا وتر 1.5" اور ضلع 1" ہو ۔

86 " " " 3.5 سم اور ضلع 2.5 سم ہو ۔

87 مُربّع بناؤ ۔ کا وتر 1.4" ہو ۔

88 " " 3 سم ہو ۔

89 ||ع بناؤ جس کے دو اضلاع 1.2" اور 1.4" ہوں اور ارتفاع 1" ہو ۔

90 " " " " " 3 سم اور 2.8 سم ہوں اور ارتفاع 2.5 سم ہو ۔

91 ||ع بناؤ جس کا قاعدہ = 1"، ارتفاع = .8" اور قاعدے کا زاویہ = 60° ہو ۔

92 ||ع بناؤ جس کا قاعدہ = 3 سم، ارتفاع = 2 سم اور قاعدے کا زاویہ = 135° ۔

93 ||ع بناؤ جس کا قاعدہ = 1"، ارتفاع = .8" اور ایک وتر 1.8" ہو ۔

94 ||ع بناؤ۔ جِس کا قاعِدہ 3 سم، اِرتفاع 5.2 سم اور ایک وَتر 6 سم ہو۔

95 ||ع بناؤ۔ جِس کے وَتر 1گ اور 1.4گ ہوں اور اُن کا درمیانی زاویہ = 60° ہو۔

96 ||ع بناؤ۔ جِس کے وَتر 5 سم اور 7 سم ہوں اور اُن کا درمیانی زاویہ = 11°
ہو۔

97 ||ع بناؤ۔ جِس کے دو اضلاع 1.2گ اور .8گ اَور وتر 1.5گ ہو۔

98 ||ع بناؤ۔ جِس کے اضلاع 3 سم اور 4 سم ہوں اور ایک وَتر 5 سم ہو۔

99 ||ع بناؤ۔ جِس کے وَتر 2گ اور 3گ ہوں اور ایک ضِلع 1.5گ ہو۔

100 ||ع بناؤ۔ جِس کے وَتر 3 سم اور 5 سم ہوں اور ایک ضِلع 3 سم ہو۔

101 مُعیّن بناؤ۔ جِس کا ضلع 1گ اور ایک وتر .8گ ہو۔

102 ″ ″ ″ ″ 2 سم اور ایک وَتر 3 سم ہو۔

103 ″ ″ جِس کے دونوں وَتر 3گ، 4گ ہوں۔

104 ″ ″ ″ ″ وَتر 4، 5 سم ہوں۔

105 ایک خط 3گ لمبا لو اور اس کا $\frac{3}{8}$ حصّہ کاٹو۔

106 ایک خط 8 سم لمبا لو اور اس کا $\frac{2}{9}$ حصّہ کاٹو۔

107 △ بناؤ۔ جِس کا احاطہ 8.4 اور ضِلعوں کا تناسب 3 : 4 : 5 ہو۔

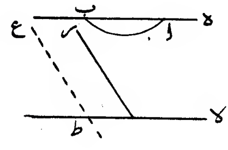
108 △ ″ ″ ″ 8 سم و ″ ″ 4 : 5 : 7 ہو۔

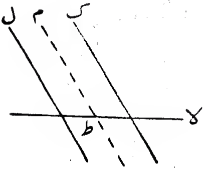
109 زاویہ ا ذ ب = 45°، ط کوئی نُقطہ ساقین کے درمیان ہے۔ ایک
خط ق ط س ایسا کھینچو کہ 2 ق ط = 3 ط س۔

110 زاویہ ا ذ ب = 88°، ط کوئی نُقطہ ساقین کے درمیان ہے۔ ایک
خط ق ط س ایسا کھینچو کہ 3 ق ط = 4 ط س۔

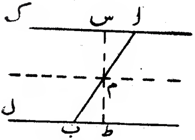
111 دِیے ہُوئے خط میں ایسا نقطہ معلوم کرو۔ جس کا فاصلہ کسی دِیے ہُوئے نُقطے
سے معلوم ہو۔

112 دِیے ہوئے خط میں ایسا
نقطہ معلوم کرو۔ جس کا
فاصلہ کسی اور دیے
ہوئے خط سے معلوم
ہو۔

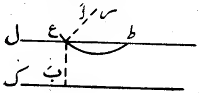




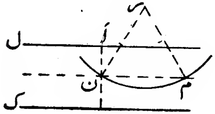
113 دیے ہوئے خط میں ایک ایسا نقطہ معلوم کرو جس کا فاصلہ دو قائم متوازی خطوط سے مساوی ہو۔ اگر دیا ہوا خط قائم خطوط کے متوازی ہو تو کیا صورت ہو گی؟



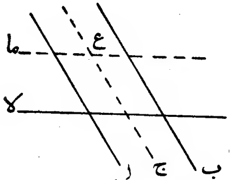
114 جن خطوط کے سر دو قائم متوازی خطوط پر واقع ہوں اُن کے وسطی نقاط کا طریق معلوم کرو ۔



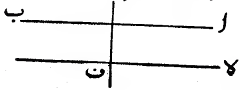
115 ایسا نقطہ معلوم کرو جس کا فاصلہ ایک قائم نقطے سے رَ اور ایک قائم خطِ مستقیم سے بَ ہو ۔



116 ایسا نقطہ معلوم کرو جس کا فاصلہ ایک قائم نقطے سے رَ کے برابر ہو اور جو دو متوازی خطوط سے مساوی البُعد ہو ۔

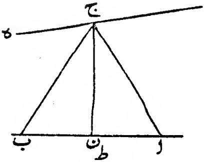


117 ایسا نقطہ معلوم کرو جو دو متوازی خطوط سے مساوی البُعد ہو اور جس کا فاصلہ ایک دیے ہوئے خط سے رَ کے برابر ہو ۔

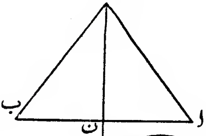


118 دیے ہوئے خط میں ایسا نقطہ معلوم کرو جو دو قائم نقاط سے مساوی البُعد ہو اگر دیا ہوا خط نقاط کے ملانے والے

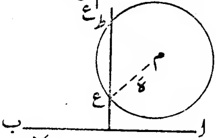
خط پر علی القوائم ہو تو کیا صُورت ہو گی ؟



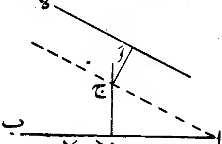
119 مُساوی السّاقین مثلّث بناؤ۔ جس کا قاعدہ معلُوم ہو۔ اور جس کا راس دیے ہُوئے خط پر واقع ہو ؂



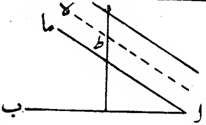
120 اب ایک خطِ مُستقیم ہے ایسا نقطہ معلُوم کرو۔ جو ا اور ب سے مُساوی البُعد ہو اور اب سے ایک خاص فاصلے پر ہو ؂



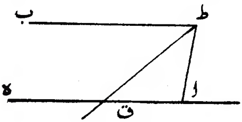
121 ایسا نقطہ معلُوم کرو۔ جس کا فاصلہ کسی قائم نقطے سے ہَ ہو اور جو دو دیگر قائم نقاط سے مُساوی البُعد ہو ؂



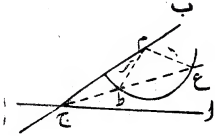
122 ایسا نقطہ معلُوم کرو جو دو قائم نقاط سے مُساوی البُعد ہو اور جس کا فاصلہ ایک دیے ہُوئے خط سے رَ ہو ؂



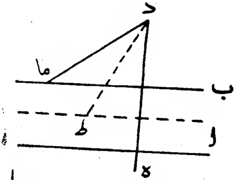
123 ایسا نقطہ معلُوم کرو۔ جو دو قائم نقاط سے مُساوی البُعد ہو۔ نیز دو مُتوازی خطُوط سے مُساوی البُعد ہو ؂



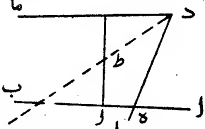
124 دیے ہُوئے خط میں ایسا نقطہ معلُوم کرو جو دو مُتقاطع خطُوط سے مُساوی البُعد ہو۔ یہ ترکیب کب ناممکنُ العمل ہو گی ؟



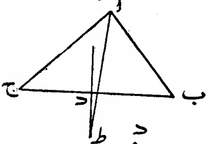
125 ایسا نقطہ معلوم کرو جس کا فاصلہ کسی قائم نقطے سے اَ کے برابر ہو اور جو دو مُتقاطع خطوط سے مُساوی البُعد ہو ۔



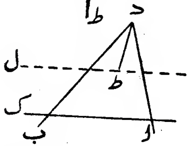
126 ایسا نقطہ معلوم کرو جو دو مُتقاطع خطوط سے مُساوی البُعد ہو اور دو مُتوازی خطوط سے بھی مُساوی البُعد ہو ۔



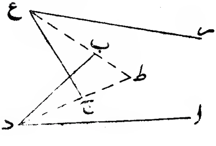
127 (ا) ایسا نقطہ معلوم کرو جو دو قائم نقاط سے مُساوی البُعد ہو۔ نیز دو مُتقاطع خطوط سے مُساوی البُعد ہو ۔



(ب) △ اب ج میں ایک ایسا نقطہ معلوم کرو جو ب اور ج سے مُساوی البُعد ہو۔ نیز اب اور اج سے مُساوی البُعد ہو ۔

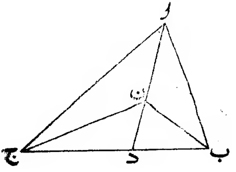


128 ایسا نقطہ معلوم کرو جو دیے ہوئے خط ک سے فاصلہ تَ پر ہو اور دو مُتقاطع خطوط سے مُساوی البُعد ہو ۔

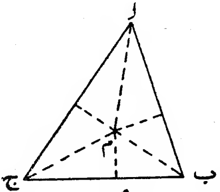


129 دا اور دب دو مُتقاطع خطوط ہیں ۔ اسی طرح ع ج اور ع س دو مُتقاطع خطوط ہیں ایسا نقطہ ط معلوم کرو ۔ جو دا اور دب سے مُساوی البُعد ہو ۔ نیز ع ج ، ع س

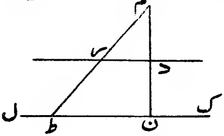
سے مُساوی البُعد ہو ۔



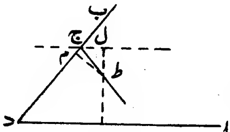
130 نقطہ ن △ ا ب ج کے اندر واقع ہے اور اِس کا فاصلہ تمام اضلاع سے برابر ہے ۔ بتاؤ زوایا ب نٓ ج ، ج ن ا ، ا ن ب کا ۔ مُثلّث کے زوایا سے کیا تعلّق ہے ؟



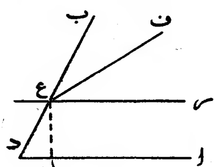
131 نقطہ م مُثلّث ا ب ج کے راسوں سے مُساوی البُعد ہے اگر $\hat{ب} = 72^\circ$ اور $\hat{ج} = 54^\circ$ تو ا مٓ ب ، ب مٓ ج اور ج مٓ ا کی مقداریں بتاؤ ۔



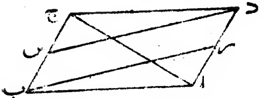
132 نقطہ م سے خط ک ل تک چند خطوط کھینچے گئے ہیں ۔ اِن خطوط کے وسطی نقاط کا طریق بتاؤ ۔



133 اُس نقطے کا طریق معلوم کرو جو اس طرح حرکت کرے کہ د ا اور د ب سے اُس کے فاصلوں کا مجموعہ ہمیشہ مُستقل رہے

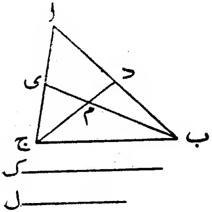


134 اُس نقطے کا طریق معلوم کرو ۔ جو اِس طرح حرکت کرے کہ د ا اور د ب سے اِس کے فاصلوں کا فرق ہمیشہ مُستقل رہے ۔



135 کسی اا ع کے وَتر کی تثلیث کرو۔

136 ایک ایسا مثلث بناؤ۔ جس کا ایک ضلع اور باقی دو ضلعوں کے ناصف معلوم ہوں۔



معلوم: $\overline{ب ج}$ ضلع اور ک، ل وسطانیے معلوم ہیں

عمل: ب م ج △ بناؤ۔ جس میں

$\overline{ب م} = \frac{2}{3}$ ک،

$\overline{ج م} = \frac{2}{3}$ ل

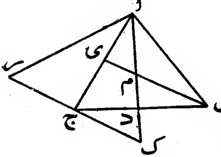
$\overline{ج م}$ کو د تک اور $\overline{ب م}$ کو ی تک اِس طرح بڑھاؤ کہ

$\overline{م د} = \frac{1}{3}$ ل اور $\overline{م ی} = \frac{1}{3}$ ک،

$\overline{ب د}$ اور $\overline{ج ی}$ کو ملاؤ اور بڑھاؤ تا آنکہ ا پر مل جائیں۔

پس ا ب ج مطلوبہ مثلث ہوگا۔

137 ایک مثلث بناؤ۔ جس کے تینوں وسطانیے معلوم ہیں۔



اشارہ: ا ب ج ایک تکون بناؤ۔ جس کے اضلاع معلومہ وسطانیوں کے برابر ہوں۔ اِس △ کے وسطانیے $\overline{ا د}$ اور $\overline{ب ی}$ کھینچو۔ جو م پر ملیں۔ $\overline{ا د}$ کو بڑھاؤ۔ یہاں تک کہ $\overline{د ک} = \overline{م د}$، $\overline{ک ج}$ کو ملاؤ اور اُسے اتنا بڑھاؤ کہ $\overline{ج س} = \overline{ک ج}$، $\overline{ا س}$ کو ملاؤ۔

پس ا ک س مطلوبہ △ ہے۔

138 ایک مثلث بناؤ۔ جس کے وسطانیے "1.6، "2 اور "2.1 ہوں

تیسرا حصّہ

رقبہ

کسی محدود شکل کا رقبہ سطح کا وہ حصّہ ہے جو اُس کے اِحاطہ کرنے والے خطوط کے اندر واقع ہو۔

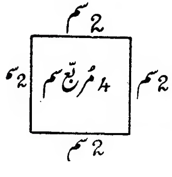
مُستطیل اور مُربّع کی تعریف پہلے دی جا چکی ہے

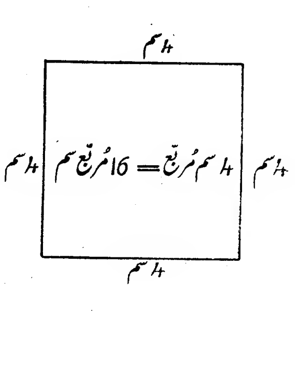
اگر ایسے خط پر جس کا طُول اِکائی کے برابر ہو مُربّع شکل کھینچی جائے تو اُس کا رقبہ ایک مُربّع اِکائی ہوگا۔

ہر رقبہ اُسی اکائی کے پیمانے سے ناپا جائے گا۔

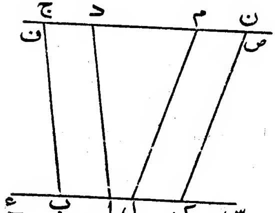
ہندسی پیمائش میں ایک اِنچ یا ایک سنٹی میٹر کو طُول کی اِکائی لیا جاتا ہے اور ایک مُربّع اِنچ یا ایک مُربّع سنٹی میٹر کو رقبے کی اِکائی۔

طالب علم کو ذہن نشین کر لینا چاہیے کہ 4 مُربّع سم اور 4 سم مُربّع کے الفاظ میں بہت فرق ہے "4 مُربّع سم" سے مُراد اُس مُربّع کا رقبہ ہے۔ جس کا ضِلع 2 سم کے برابر ہو۔ لیکن 4 سم مُربّع سے اُس مربّع کا رقبہ مُراد ہوگا جو 4 سم طُول کے خط پر بنایا جائے۔ اُس کا رقبہ $4 \times 4 = 16$ مُربّع سم ہوگا



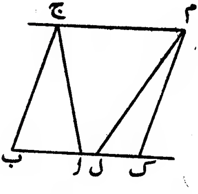


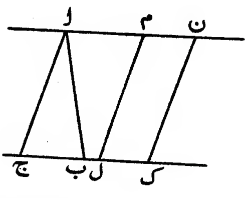
خطوطِ مُتوازی کے درمیان واقع ہونا



دو مُتوازی الاضلاع ایک ہی خطوطِ مُتوازی کے درمیان واقع ہوتے ہیں جب اُن کے قاعدے ایک ہی خطِ مستقیم میں ہوں اور اُن کے قاعدوں کے مُتقابلہ اضلاع بھی ایک ہی خطِ مستقیم میں ہوں۔ جیسا سامنے کی شکل میں ۱۱ع اب ج د اور ک ل م ن دو مُتوازی خطوط س ع اور ص ف کے درمیان واقع ہیں ؎

دو مثلث ایک ہی خطوط ۱۱ کے درمیان واقع ہوتے ہیں۔ جب اُن کے قاعدے ایک ہی خطِ مستقیم میں ہوں اور اُن کے راسوں کو ملانے والا خط قاعدے کے خط کے مُتوازی ہو۔ جیسے شکل ذیل میں △ن اب ج اور ک ل م دو مُتوازی خطوط کے درمیان ہیں۔ ایک مثلث اور ایک مُتوازی الاضلاع ایک ہی خطوطِ مُتوازی کے درمیان واقع ہوتے ہیں۔ جب اِن کے قاعدے ایک





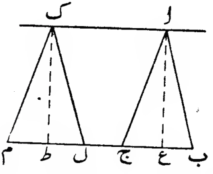
ہی خطِ مستقیم میں ہوں اور مُتوازی الاضلاع کا وُہ ضلع جو قاعدے کے سامنے ہے (بشرطِ ضرورت بڑھا کر) مثلث کے راس میں سے گزرے جیسا اُوپر کی شکل میں △ اب ج اور ۱۱ع ک ل م ن ایک ہی مُتوازی خطوط ک ج.

ارتفاع

اگر اا ع کے ایک ضلع کو قاعدہ سمجھا جائے تو اُس سے متوازی ضلعے اور قاعدے کے درمیان عمودی فاصلے کو اا ع کا ارتفاع یا بلندی کہتے ہیں ؀

اگر مثلث کے ایک ضلع کو قاعدہ تصور کیا جائے تو مقابلہ راس سے جو عمود قاعدے پر کھینچا جائے گا۔ اُس کو مثلث کا ارتفاع یا بلندی کہتے ہیں ؀

مسئلہ: مساوی ارتفاع کے مثلث اور متوازی الاضلاع ایک ہی خطوط متوازی کے درمیان رکھے جا سکتے ہیں اور اس کے برعکس



مثلثان ا ب ج اور ک ل م کو اس طرح رکھو کہ ب ج اور ل م ایک ہی خطِ مستقیم میں ہوں اور راس ایک ہی جانب۔

فرض کرو ا ع اور ک ط ارتفاع ہیں جو باہم برابر ہیں۔ ہمیں ثابت کرنا ہے کہ ا ک اا ہے ب ج ل م کے

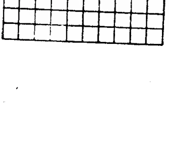
ثبوت: ا ع اور ک ط متوازی ہیں کیونکہ یہ دونوں ب م پر عمود ہیں۔

نیز ا ع = ک ط ہے

∴ بحکم مسئلہ 18 ا ک ، ع ط متوازی ہیں۔

مساوی ارتفاع کے اا ع بھی اسی طرح ایک ہی متوازی خطوط میں رکھے جا سکتے ہیں ؀

مستطیل کا رقبہ



طالب علم پہلے سیکھ چکا ہے کہ مستطیل کے رقبے میں اتنی ہی مربع اکائیاں ہوتی ہیں۔ جتنا اس کے طول اور عرض کی اکائیوں کا حاصل ضرب ہے۔

چارخانی کاغذ لو - اور اس میں مُستطیل بناؤ - جس کا طُول 10 اِکائیاں اور عرض 6 اِکائیاں ہو - اس مُستطیل میں 60 چھوٹے چھوٹے مُربّعے ہوں گے - جن میں سے ہر ایک کا رقبہ ایک مُربّع اکائی ہے - مُستطیل میں چھ چھ مُربّعوں کی دس قطاریں ہیں -

پس رقبہ = 10 × 6 مُربّع اِکائیاں -

اِسی طرح اگر طُول میں ل اکائیاں اور عرض میں ب اِکائیاں ہوں تو مُستطیل کا رقبہ ل × ب مُربّع اِکائیوں کے برابر ہے -

اگر شکل مُربّع ہو اور اُس کے ضلع کا طُول ل اِکائیاں ہوں تو رقبہ ل² مُربّع اکائیاں ہو گا ۔

مُساوی شکلیں

مُنطبق اشکال کا ذکر پہلے آچکا ہے - دو ہندسی شکلیں مُنطبق ہوں گی - جب ایک کے حدُود بعینہٖ اور بلا فرق دُوسری شکل کے مُتناظرہ حدُود سے ایک ایک کر کے مُساوی ہوں - ظاہر ہے کہ مُنطبق شکلوں کے رقبے بھی مُساوی ہوں گے -

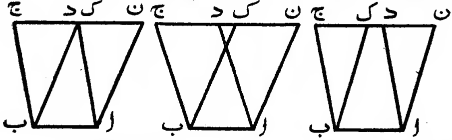
لیکن اگر دو شکلوں کے رقبے مُساوی ہوں تو ضرُوری نہیں کہ وہ مُنطبق بھی ہوں اِس صُورت میں اِن کو مُساوی شکلیں کہیں گے یعنی (مُساوی الرّقبہ)

جب دو شکلوں میں نشان "≡" ڈالا جائے تو اس سے یہ مطلب ہو گا کہ شکلیں مُنطبق بھی ہیں اور مُساوی الرّقبہ بھی - لیکن اگر ان میں نشان "=" ہو تو وُہ مُساوی الرّقبہ سمجھی جائیں گی مگر ضرُوری نہیں کہ وُہ مُنطبق بھی ہوں -

مسئلہ 41

(اثباتی)

مُتوازی الاضلاع جو ایک ہی قاعدے پر ہوں اور جن کے اِرتفاع مُساوی ہوں۔ رقبے میں باہم برابر ہوتے ہیں ٭



مفروض فرض کرو ∥ع ا ب ج د ، ا ب ک ن ایک ہی قاعدہ ا ب پر قاعدے کے ایک ہی طرف واقع ہیں اور ان کے اِرتفاع مشترک مُساوی ہیں

مطلوب ∥ع کے رقبے مُساوی ہیں ٭

ثبوت

∵ اِرتفاع مُساوی ہیں

∴ ہردو ∥ع ایک ہی خطوط ∥ کے درمیان واقع ہوں گے ٭

لہٰذا ن ج خط مُستقیم ہے جو ا ب کے ∥ ہے ٭

∵ د ج = ا ب = ن ک ∴ ک ج = ن د

اب مثلّثان ج ک ب ، د ن ا میں ٭

∵ { ک ج = ن د (بموجب ثبوت مذکورہ)
ک ب = ن ا (∥ع کے مُتقابلہ ضلعے)
ج ک̂ ب = د ن̂ ا (∵ ب ک ∥ ا ن)

لہٰذا △ن منطبق ہیں اور رقبے میں برابر ہیں ٭

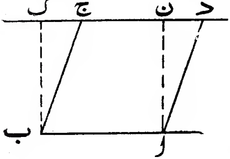
اب اگر △ د ن ا کو تمام شکل ا ب ج ن میں سے ساقط کیا جائے تو ∥ع ا ب ج د باقی رہے گا ٭

اور اگر △ ج ک ب کو شکل ا ب ج ن میں سے ساقط کیا جائے تو ∥ع ا ب ک ن باقی رہے گا ٭

لہٰذا ∥ع ا ب ج د کا رقبہ ∥ع ا ب ک ن کے رقبے کے مُساوی ہے ٭

نتیجۂ صریح (ا) متوازی الاضلاع جو ایک ہی قاعدے پر اور ایک ہی خطوطِ متوازی کے درمیان واقع ہوں رقبے میں باہم برابر ہوتے ہیں۔
(۲) متوازی الاضلاع اور مستطیل جو ایک ہی قاعدے پر ہوں اور جن کے ارتفاع مشترک یا مساوی ہوں رقبے میں باہم برابر ہوتے ہیں۔
چونکہ مستطیل کا رقبہ = قاعدہ × ارتفاع
لہٰذا متوازی الاضلاع کا رقبہ = قاعدہ × ارتفاع

مشق 41



1 شکل اا ع ا ب ج د مقوّے یا موٹے کاغذ پر بناؤ۔ ا ن کو ج د پر عموداً کھینچو۔
△ د ن ا کو کاٹو اور ج ک ب کی جگہ رکھو (جیسا شکل میں دکھایا گیا ہے)
اس سے ثابت ہوگا کہ اا ع ا ب ج د = مستطیل ا ب ک ن

2 ایسے متوازی الاضلاع بناؤ۔ جن کے امتداد اور زاویے حسبِ ذیل ہوں۔ ان کے ارتفاع ناپو اور رقبے معلوم کرو:-
(ا) اضلاع 5.4 سم اور 4.5 سم اور درمیانی زاویہ 60°
(ب) " 4.2 " 3.8 اور " وتر 4.9
(ج) " 4.5 سم " 3.6 سم " زاویہ 50°
(د) وتر 4 " " 6 " " 54

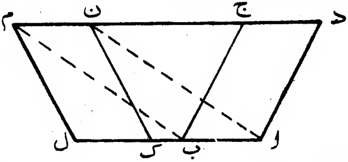
3 ایک متوازی الاضلاع بناؤ۔ جس کا رقبہ 5.5 مربع انچ اور اضلاع 2.5 اور 3 ہوں۔ عمل کی تشریح کرو۔ اور بڑے وتر کی پیمائش کرو۔

4 اگر ایک متوازی الاضلاع اور ایک مستطیل ایک ہی قاعدے پر اور ایک ہی متوازی خطوط کے درمیان واقع ہوں تو اا ع کا احاطہ مستطیل کے احاطے سے بڑا ہوگا۔

مسئلہ 42

(اثباتی)

مُتوازی الاضلاع جن کے قاعدے اور اِرتفاع مُساوی ہوں، رقبے میں باہم برابر ہوتے ہیں ۔



مفروض: فرض کرو ااع اب ج د، ک ل م ن کے قاعدے اب، ک ل برابر ہیں اور ان کے اِرتفاع بھی برابر ہیں ۔

مطلوب: ہردو ااع کے رقبے مُساوی ہوں گے ۔

عمل: ہردو ااع کو اس طرح رکھو کہ ان کے قاعدے ایک ہی خطِ مُستقیم اب ک ل میں واقع ہوں۔ اور شکلیں ایک ہی طرف ہوں ب م اور ا ن کو ملاؤ ۔

ثبوت:

∵ ارتفاع مُساوی ہیں

∴ ہردو ااع ایک ہی خطوط اا کے درمیان واقع ہوں گے۔

لہٰذا م ن ج د ایک خطِ مُستقیم ہے جو اب کے اا ہے ۔

∵ اب = ک ل = ن م

∴ اب = ن م اور یہ مُتوازی ہیں

∴ ا ن اور ب م مُساوی اور مُتوازی ہیں اور اب م ن ااع ہے ۔

∵ ااع اب ج د اور ااع اب م ن (ایک ہی قاعدہ اب پر دو مُتوازی خطوط میں واقع ہیں)

∴ ااع اب ج د = ااع اب م ن۔

نیز ااع ک ل م ن اور ااع اب م ن (ایک ہی قاعدہ م ن پر دو اا خطوط میں واقع ہیں)

∴ ااع اب م ن = ااع ک ل م ن

لہٰذا ااع اب ج د = ااع ک ل م ن ۔ (فہو المطلوب)

نتیجۂ صریح (۱) مُتوازی الاضلاع جو مُساوی قاعدوں پر ایک ہی خطوط مُتوازی کے درمیان واقع ہوں رقبے میں باہم برابر ہوتے ہیں ۞

(۲) مُتوازی الاضلاع جو مُساوی قاعدوں پر ہوں۔ اُن کے رقبوں کی باہمی نسبت اِرتفاع کی باہمی نسبت کے برابر ہوتی ہے ۞

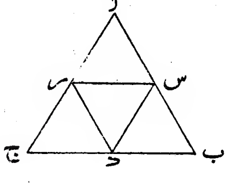
(۳) مُتوازی الاضلاع جن کے اِرتفاع مُساوی ہوں۔ ان کے رقبوں کی باہمی نسبت قاعدوں کی باہمی نسبت کے برابر ہوتی ہے ۞

مشق 42

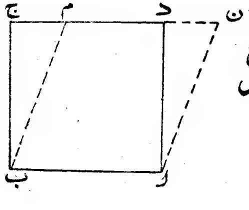
1 اگر دو مُتوازی الاضلاع مُساوی الرّقبہ ہوں اور اُن کے قاعدے مُساوی ہوں تو اِن کے اِرتفاع بھی مُساوی ہوں گے ۞

2 اگر مسئلہ نمبر ۱۸ کی پہلی شکل میں ل اور م خطوط ب ج ، ا ن کے نقاط وسطی ہوں تو ثابت کرو △ ج ل د ، ک م ن رقبے میں برابر ہیں ۞

3 اگر مثلّث کے اضلاع کے وسطی نقاط کو ملایا جائے تو ملانے والے خطوط اضلاع مثلّث کے ساتھ تین ااع بنائیں گے۔ جن کے رقبے برابر ہوں گے ۞



4 مُربّع کا اِحاطہ اس مُساوی مُتوازی الاضلاع کے اِحاطے سے کم ہوگا جو مُربّع کے قاعدے پر بنایا جائے ۞

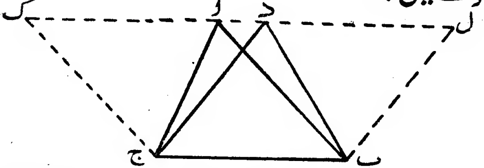


5 ثابت کرو کہ ایک مُتوازی الاضلاع کو تین مُساوی الرّقبہ مُتوازی الاضلاعوں میں تقسیم کیا جاسکتا ہے ۞

مسئلہ 43

(اثباتی)

ہم قاعدہ مثلّث جن کے اِرتفاع مُساوی ہوں، رقبے میں برابر ہوتے ہیں ؀



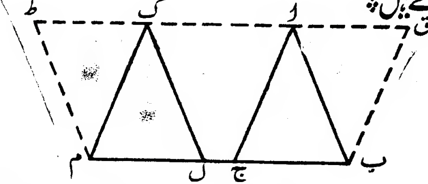
مفروض	فرض کرو △ن اب ج ، دب ج ایک ہی قاعدہ $\overline{\text{ب ج}}$ پر واقع ہیں اور اِن کے اِرتفاع مُساوی ہیں ؀
مطلوب	△ن کے رقبے باہم برابر ہوں گے ؀
عمل	خط ج ک خط $\overline{\text{ب ا}}$ کے ∥ کھینچو جو $\overline{\text{د ا}}$ کو بڑھانے سے نُقطہ ک پر ملے خط $\overline{\text{ب ل}}$ خط $\overline{\text{ج د}}$ کے ∥ 〃 〃 ا د 〃 〃 〃 ل 〃
ثبوت	∥ع اب ج ک اور ∥ع ل ب ج د ایک ہی قاعدے پر واقع ہیں اور اِن کے اِرتفاع مُساوی ہیں ؀ ∴ وُہ رقبے میں باہم برابر ہیں [مسئلہ 41] لیکن △ اب ج = $\frac{1}{2}$ ∥ع اب ج ک [مسئلہ 17] اور △ دب ج = $\frac{1}{2}$ ∥ع ل ب ج د [〃 17] اِس واسطے △ اب ج ، △ دب ج رقبے میں برابر ہیں ؀ (فہو المطلوب)

نتیجۂ صریح: ہم قاعدہ مثلّث جو ایک ہی خطوطِ مُتوازی کے درمیان واقع ہوں ۔ رقبے میں برابر ہوں گے ؀

مسئلہ 44

(اثباتی)

مُساوی قاعدے اور مُساوی اِرتفاع والے مثلّث رقبے میں مُساوی ہوتے ہیں ۔



مفروض: فرض کرو △ ا ب ج ، ک ل م کے قاعدے ب ج ، ل م باہم مُساوی ہیں اور ان کے اِرتفاع بھی مُساوی ہیں ۔

مطلوب: △ن کے رقبے باہم برابر ہوں گے ۔

عمل: △ن کو اس طرح رکھو کہ اِن کے قاعدے ایک ہی خط مُستقیم ب ج ل م میں واقع ہوں اور اِن کے راس ایک ہی جہت میں ہوں ۔ خط ب ق خط ج ا کے متوازی کھینچو جو ک ا کو نقطہ ق پر ملے اور خط م ط خط ل ک کے متوازی کھینچو جو ا ک کو نقطہ ط پر ملے ۔

ثبوت: ||ع ب ج ا ق اور ||ع ل م ط ک مُساوی قاعدوں پر واقع ہیں اور ان کے اِرتفاع بھی مُساوی ہیں

لہٰذا رقبے میں باہم برابر ہیں ۔ [مسئلہ 42]

لیکن △ ا ب ج = $\frac{1}{2}$ ||ع ب ج ا ق [17 〃]

اور △ ک ل م = $\frac{1}{2}$ ||ع ل م ط ک [17 〃]

پس △ ا ب ج ، △ ک ل م رقبے میں برابر ہیں ۔

(فھو المطلوب)

نتیجۂ صریح (۱) مثلث جو مساوی قاعدوں پر اور ایک ہی خطوط متوازی کے درمیان واقع ہوں رقبے میں باہم برابر ہوتے ہیں ؛

(۲) مثلث جن کا راس ایک ہی ہو اور قاعدے ایک ہی خطِ مستقیم میں مساوی ہوں۔ رقبے میں باہم برابر ہوتے ہیں ؛

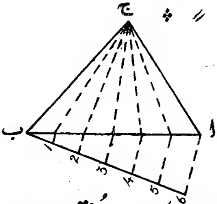
(۳) مثلث کا ہر ایک وسطانیہ مثلث کی تنصیف کرتا ہے ؛

مشق 43

1 مثلث کو تین مساوی الرقبہ مثلثوں میں تقسیم کرو ؛

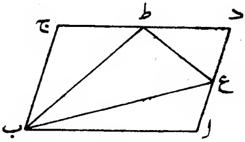
2 ″ ″ 4 ″ ″ ″ ؛

3 ″ ″ 6 ″ ″ ؛



4 مثلث کے ایک ضلع کے وسطی نقطے سے جو خط قاعدے کے متوازی کھینچا جاتا ہے وہ مثلث کو ۱ : 3 میں تقسیم کرتا ہے

5 اگر دو مثلثوں کے ارتفاع مساوی ہوں لیکن ان کے قاعدے مختلف ہوں تو جس مثلث کا قاعدہ بڑا ہو گا اس کا رقبہ بھی بڑا ہو گا ؛



6 ثابت کرو اا ع کے وتر اس کو چار برابر حصوں میں تقسیم کرتے ہیں ؛

7 اب ج د اا ع ہے۔ ع، ط خطوط ا د، ج د کے وسطی نقاط ہیں ثابت کرو کہ △ ب ع ط کا رقبہ = $\frac{3}{8}$ اا ع اب ج د ؛

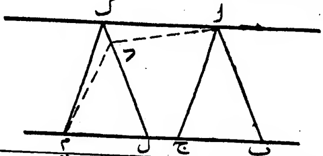
8 ثابت کرو کہ معین کا رقبہ اس کے وتروں کے حاصل ضرب سے نصف ہو گا

9 ثابت کرو کہ اگر مثلث متساوی الاضلاع کے اندر کسی نقطے سے ضلعوں پر عمود کھینچے جائیں تو ان کا مجموعہ مثلث کے ارتفاع کے برابر ہو گا ؛

مسئلہ 44 کا عکس

(اثباتی)

اگر مُساوی مثلثوں کے قاعدے مُساوی ہوں۔ تو ان کے اِرتفاع بھی مُساوی ہوں گے ۔



مفروض
فرض کرو △ن ا ب ج، ک ل م کے رقبے مُساوی ہیں اور اُن کے قاعدے ب ج، ل م برابر ہیں ۔

مطلوب
△ن کے اِرتفاع مُساوی ہوں گے ۔

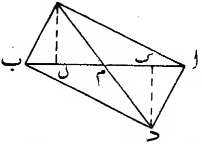
عمل
△ن کو اس طرح رکھو کہ ان کے قاعدے ب ج، ل م ایک ہی خطِ مُستقیم میں ہوں اور ان کے راس ا، ک خط ب م کے ایک ہی طرف ہوں۔ ا ک کو ملاؤ۔ تب خط ا ک خط ب م کے ∥ ہوگا۔ اگر نہیں تو خط ا د کھینچو۔ جو ب م کے ∥ ہو۔ د م کو ملاؤ ۔

ثبوت
∵ ب ج = ل م اور ا د ∥ ہے ب م کے (برُوئے عمل)
∴ △ ا ب ج = △ د ل م
لیکن △ ا ب ج = △ ک ل م (مفرُوض)
∴ △ د ل م = △ ک ل م
جو ناممکن ہے کیونکہ جُزو کُل کے برابر نہیں ہو سکتا
∴ ا د خط ب م کے ∥ نہیں بلکہ ا ک ہی ب م کے مُتوازی ہے ۔
لہٰذا △ ا ب ج، △ ک ل م ایک ہی خطوط مُتوازی کے درمیان واقع ہیں ۔
پس اِن کے اِرتفاع مُساوی ہیں ۔ (فھوَالمطلوب)

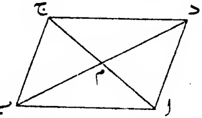
نتیجۂ صریح: مُساوی الرّقبہ مثلّث جن کے اِرتفاع مُساوی ہوں اُن کے قاعِدے بھی مُساوی ہوں گے ۔

مشق 44

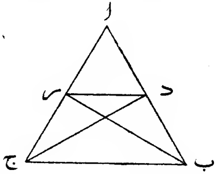
1 دو مُساوی الرّقبہ مثلّث ایک ہی قاعِدے کے مُخالف طرفوں میں واقع ہیں۔ ثابت کرو کہ اُن کے راسوں کو مِلانے والے خط کا نقطۂ تنصیف قاعِدے پر واقع ہوگا۔



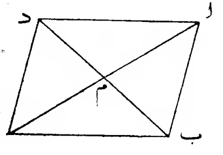
2 اگر ذُواربعۃ الاضلاع کا ایک وَتر دُوسرے کی تنصیف کرے تو وُہ ذُواربعۃ الاضلاع کی بھی تنصیف کرے گا۔



3 اگر کسی چوکور کو اِس کا ہر وَتر دو مُساوی الرّقبہ حصّوں میں تقسیم کرے تو چوکور ااع ہوگا۔



4 مُتساوی السّاقین مثلّث کے قاعِدے پر کے زاویوں کے ناصف باقی ضلعوں کو د اور س پر مِلتے ہیں ثابت کرو د س قاعِدے کے متوازی ہے۔

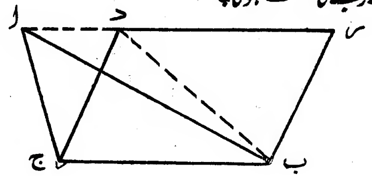


5 ایک چوکور میں وَتر کے نُقطۂ تنصیف کو مقابِل کے کونوں سے مِلانے والے خطوطِ مستقیم اِس چوکور کو برابر حصّوں میں تقسیم کرتے ہیں۔ ثابت کرو کہ وُہ چوکور ااع ہے۔

مسئلہ 45

(اثباتی)

اگر ایک مثلث اور ایک متوازی الاضلاع ایک ہی قاعدے پر واقع ہوں اور اُن کے اِرتفاع مُساوی ہوں تو مثلث کا رقبہ متوازی الاضلاع کے رقبے کا نصف ہوگا ۔



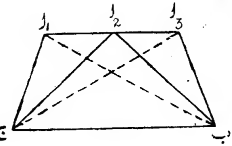
مفروض	فرض کرو △ اب ج اور ||ع ب ج د س ایک ہی قاعدہ ب ج پر اس کے ایک طرف واقع ہیں اور اُن کے اِرتفاع مُساوی ہیں ۔
مطلوب	△ اب ج $= \frac{1}{2}$ ||ع ب ج د س ۔
عمل	ب د کو ملاؤ ۔
ثبوت	∵ مثلثان اب ج ، د ب ج ایک ہی قاعدے پر واقع ہیں اور اُن کے اِرتفاع بھی مُساوی ہیں لہٰذا رقبے میں △ اب ج = △ د ب ج (مسئلہ 44) لیکن △ د ب ج $= \frac{1}{2}$ ||ع ب ج د س لہٰذا △ اب ج $= \frac{1}{2}$ ||ع ب ج د س ۔

(فھو المطلوب)

نتیجۂ صریح: مثلّث کا رقبہ = $\frac{1}{2}$ × قاعدہ × اِرتفاع

[ثبوت: اگر مثلّث کے قاعدے پر اُسی اِرتفاع کا مُستطیل بنایا جائے تو
مثلّث کا رقبہ مستطیل کے رقبے کا نصف ہوگا۔
لیکن مُستطیل کا رقبہ = قاعدہ × اِرتفاع
∴ مثلّث کا رقبہ = $\frac{1}{2}$ × قاعدہ × اِرتفاع]

مشق 45



[دیے ہوئے قاعدے پر مُساوی الرّقبہ مثلّثوں کے راس کا طریق النقاط معلوم کرو۔

2 مثلّث اور ااع کے اِرتفاع مُساوی ہیں۔ لیکن ااع کا قاعدہ مثلّث کے قاعدے سے آدھا ہے۔
ثابت کرو کہ وُہ دونوں مُساوی الرّقبہ ہیں۔

ذیل کے مثلّث بناؤ اور سوال 3، 4 میں رقبے معلوم کرو۔
(اِرتفاع کی پیمائش سے)

3 اب = 6 سم، بج = 5 سم، جا = 4 سم

4 اب = 3.2، بج = 3.4، $\hat{ب}$ = 30°

5 اب = 5.2 سم، $\hat{ا}$ = 54°، رقبہ = 17.68 مُربّع سم

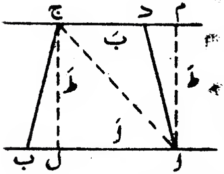
6 اب = 4.5 سم، بج = 3.9 سم، رقبہ = 7.8 ″

7 مثلّث اب ج میں اگر $\hat{ا}$ = 90° اور اد عمود ہو بج پر تو ثابت کرو کہ:

اد = $\frac{\text{اب × اج}}{\text{ب ج}}$

ذُوزنقہ کا رقبہ

ذُوزنقہ کا رقبہ مُتوازی ضلعوں کے نصف مجمُوعے اور اِرتفاع کے حاصِل ضرب کے برابر ہوتا ہے ؎



مفرُوض: فرض کرو اب ج د ذُوزنقہ ہے۔ جس کے اضلاع $\overline{اب}$ اور $\overline{جد}$ مُتوازی ہیں اور ان کا طُول اَ، بَ ہے اور اِرتفاع = جل = ام = طَ

مطلُوب: رقبہ $= \frac{1}{2}$ (اَ + بَ) × طَ

عمل: اج کو ملاؤ۔

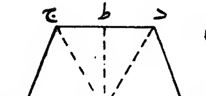
ثبُوت: △ اب ج $= \frac{1}{2} \times$ $\overline{جل} \times \overline{اب}$ $= \frac{1}{2} \times$ طَ × اَ

اور △ اج د $= \frac{1}{2} \times$ $\overline{ام} \times \overline{جد}$ $= \frac{1}{2} \times$ طَ × بَ

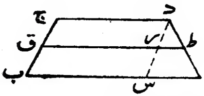
پس شکل اب ج د $= \frac{1}{2}$ طَ × اَ $+ \frac{1}{2}$ طَ × بَ

$= \frac{1}{2}$ (اَ + بَ) طَ

مشق 45 (جاری)

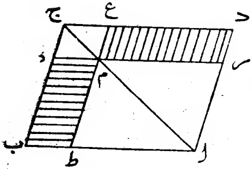


۶ اب ج د ایک ذُوزنقہ ہے ق، ط مُتوازی اضلاع $\overline{اب}$، $\overline{جد}$ کے وسطی نقاط ہیں۔ ثابت کرو کہ $\overline{طق}$ ذُوزنقہ کی تنصیف کرتا ہے۔



ثابت کرو کہ ذُوزنقہ کا رقبہ اس کے اِرتفاع اور وسطانیہ کے حاصِل ضرب کے برابر ہوتا ہے۔ (ذُوزنقہ کا وسطانیہ وہ خط ہے جو اُس کے غیر مُتوازی اضلاع کے وسطی نقاط کو ملائے)

ایک ضروری مسئلہ



ا ب ج د ایک متوازی الاضلاع ہے۔ جس کے وتر ا ج پر کوئی نقطہ م ہے۔ خطوط ہ م س اور ع م ط اا^ع کے متصلہ اضلاع کے متوازی کھینچے گئے ہیں۔ ثابت کرو:-

اا^ع ع د س م = اا^ع ہ م ط ب

ثبوت: بروئے عمل

اشکال ب د، ط س، ہ ع اا^ع ہیں

نیز وتر ہر اا^ع کی تنصیف کرتا ہے

∴ △ ا د ج = △ ا ب ج (۱)

△ م س ا = △ م ط ا (2)

اور △ ج ع م = △ ج ہ م (3)

(۱) میں سے (2) اور (3) کے مجموعے کو منہا کرنے سے

اا^ع م د = اا^ع ب م

(فہو المطلوب)

جبریّہ مُساواتِ متماثلہ اور ہِندسی اشکال میں اِرتباط

1 حِساب ، الجبرے اور ہندسہ میں ایک ہی مِقدار کو مختلف طریقوں سے ظاہر کیا جاسکتا ہے۔ مثلاً حساب میں 8 اِکائیوں کو 8 سے تعبیر کیا جاتا ہے۔ الجبرے میں حرف لا سے جہاں لا = 8 اِکائیاں۔ اور علمِ ہِندسہ میں ایک خط سے جِس کا طُول 8 اِکائیاں ہو ۔

2 الجبرے میں اعداد ا ، ب کے حاصِل ضرب کو ا × ب سے تعبیر کریں گے لیکن علمِ ہِندسہ میں اِسی کو ایک مُستطیل کے رقبے سے تعبیر کریں گے جِس کا طُول ا ، عرض ب ، اِکائیاں ہو ۔

3 الجبرے میں $ا^2$ سے مراد ا × ا ہے۔ علمِ ہِندسہ میں $ا^2$ سے مُراد اس مُربّع کا رقبہ ہے جِس کا ضِلع ا اِکائیاں ہو ۔

4 اس طرح ہم اکثر جبریّہ جُملوں کو ہِندسی اشکال سے تعبیر کر سکتے ہیں ۔

مثال (ا) ط (ا + ب + ج) کی ہِندسی تعبیر وُہ مُستطیل ہوگا۔ جِس کا ایک ضِلع ط اِکائیاں اور دُوسرا ضِلع ا + ب + ج اِکائیاں ہو ۔

2 (ا + ب) (ا − ب) کی ہِندسی تعبیر وُہ مُستطیل ہوگا۔ جِس کے اضلاع ا + ب اور ا − ب اِکائیاں ہوں ۔

3 $(ا + ب)^2$ کو اُس مُربّع شکل سے ظاہر کیا جاسکتا ہے۔ جِس کا ایک ضِلع ا + ب اکائیاں ہوں ۔

4 $(ا^2 + ب^2)$ دو مُربّعوں کے مجمُوعے سے ظاہر کیا جاسکتا ہے۔ جِن کی اطراف ا اور ب اِکائیاں ہوں ۔

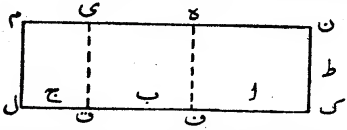
5 اگر دو جبریّہ جُملے مقادیرِ مجہُول کی ہر قیمت کے لیے باہم مُساوی ہوں تو ایسی مُساوات کو مُساواتِ متماثلہ کہتے ہیں اور اُن کے درمیان علامت ≡ لکھتے ہیں ۔

مسئلہ 46

(اثباتی)

اگر دو خطوطِ مستقیم میں سے ایک خط کئی حصّوں میں تقسیم کیا جائے تو دونوں خطوطِ مستقیم کی سطح برابر ہوگی۔ اُن سب سطحوں کے مجموعے کے جو خطِ غیر منقسم اور خطِ منقسم کے حصّوں سے بنتی ہیں۔ یعنی

ط(ا + ب + ج) ≡ ط×ا + ط×ب + ط×ج



مفروض: فرض کرو خط ک ل ایک خطِ مستقیم ہے جو ک ف، ف ق، ق ل حصّوں میں اس طرح منقسم ہے کہ ک ف = ا، ف ق = ب، ق ل = ج اکائیاں۔ نیز ک ن دُوسرا خطِ مستقیم ہے جو ک ل کے ساتھ علی القوائم کھینچا گیا ہے۔ لمبائی = ط اکائیاں

مطلوب: ط(ا + ب + ج) ≡ ط × ا + ط × ب + ط × ج

عمل: ک ل م ن، ک ف ہ ن، ف ق ی ہ، ق ل م ی مستطیلوں کو مکمل کرو

ثبوت: بروئے عمل تمام اشکال مستطیل ہیں۔

ک م کا رقبہ = ط × (ا + ب + ج)

ک ہ 〃 〃 = ط×ا

ف ی 〃 〃 = ط × ب

ق م 〃 〃 = ط×ج

لیکن ک م = ک ہ + ف ی + ق م

پس ط(ا + ب + ج) ≡ ط×ا + ط×ب + ط×ج

(فهو المطلوب)

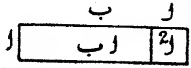
مشق 46

1 مساواتِ متماثلہ $3(3+4) = 3^2 + 4\times3$ کی تشکیل وتوضیح کرو۔

2 مساواتِ متماثلہ ا(ا + ب) ≡ ا^2 + اب کی تشکیل وتوضیح کرو اور اُس کے مطابق ہندسی مسئلے کو لفظوں میں بیان کرو۔

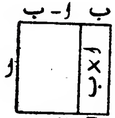
3 ہندسی تشکیل سے ثابت کرو کہ
ا(ا − ب) = ا^2 − اب

(2)



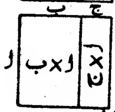
4 اگر ب + ج = ا تو
ا^2 = ا × ب + ا × ج کی
تشکیل کرو۔

(3)



5 ہندسی شکل سے ثابت کرو کہ
(ا + ب)^2 = ا(ا + ب) + ب(ا + ب)

(4)



6 ہندسی شکل سے ثابت کرو کہ:-
$(5+2)(3+2) = 5\times3 + 2\times8 + 2^2$

7 چارخانہ کاغذ پر شکلیں بناکر مساواتِ ذیل کی توضیح کرو:-
لا(لا + 4) = لا^2 + 4لا
(لا + 2)(لا + 4) = لا^2 + 6لا + 8
(لا + ا)(لا + ب) = لا^2 + (ا + ب)لا + اب
(لا + ی)(ا + ب) = الا + ای + بلا + بی

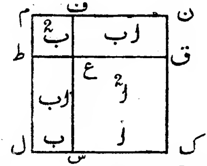
8 ہندسی شکل سے ثابت کرو کہ:-
(ا + ب + ج)(د + ی) = اد + بد + جد + ای +
بی + جی۔

مسئلہ 47

(اثباتی)

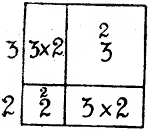
اگر کوئی خطِ مستقیم دو حصّوں میں تقسیم کیا جائے۔ تو کُل خط پر کا مُربّع برابر ہوگا دونوں حصّوں پر کے مُربّعوں کے مجمُوعے اور دونوں حصّوں کی دوچند سطح کے

یعنی $(\text{ا}+\text{ب})^2 \equiv \text{ا}^2+\text{ب}^2+2\,\text{ا}\times\text{ب}$



مفرُوض	فرض کرو ک ل ایک خطِ مُستقیم ہے جو ک س اور س ل دو حصّوں میں اس طرح منقسم ہے کہ ک س = ا، س ل = ب اِکائیاں ۔
مطلُوب	$(\text{ا}+\text{ب})^2 \equiv \text{ا}^2+\text{ب}^2+2\,\text{ا}\times\text{ب}$ ۔
عمل	ک ل پر مُربّع ک ل م ن بناؤ ک ن پر نُقطہ ق لو۔ اس طرح کہ ک ق = ا، ق ن = ب، س ع ف ॥ ک ن اور ق ع ط ॥ ک ل کھینچو ۔
ثبُوت	بروُئے عمل سب شکلیں مُربّع ہیں یا مُستطیل مُربّع ک م کا رقبہ = $(\text{ا}+\text{ب})^2$ " ک ع = ا^2 " ع م = ب^2 مُستطیل ق ف = ا × ب " س ط = ا × ب لیکن ک م = ک ع + ع م + ق ف + س ط پس $(\text{ا}+\text{ب})^2 \equiv \text{ا}^2+\text{ب}^2+2\,\text{ا}\times\text{ب}$ (فھوَالمطلُوب)

مشق 47



1. ہندسی تشکیل سے ثابت کرو کہ :-

$$(3+2)^2 = 2^2 + 2(3\times 2) + 3^2$$

2. ہندسی تشکیل سے ثابت کرو کہ :-

$$(2\,\text{ل})^2 = 4\,\text{ل}^2$$

یعنی کسی خط پر کا مُربّع آدھے خط پر کے مُربّع سے چار گنا ہوتا ہے ۔

3. ہندسی تشکیل سے ثابت کرو کہ :-

$$(3\,\text{ل})^2 = 9\,\text{ل}^2$$

یعنی کسی خط پر کا مُربّع اُس کے تہائی خط پر کے مُربّع سے نو گنا ہوتا ہے ۔

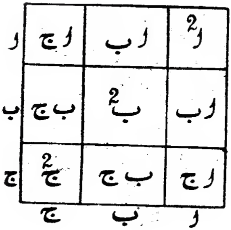
4. بذریعہ اشکال ثابت کرو :-

(1) $(\text{ل}+4)^2 = \text{ل}^2 + 8\,\text{ل} + 16$

(2) $(\text{ف}+7)^2 = \text{ف}^2 + 14\,\text{ف} + 49$

(3) $(\text{ل} + 2\,\text{ی})^2 = \text{ل}^2 + 4\,\text{لی} + 4\,\text{ی}^2$

(4) $(\text{ا}+\text{ب}+\text{ج})^2 = \text{ا}^2 + \text{ب}^2 + \text{ج}^2 + 2\,\text{اب} + 2\,\text{بج} + 2\,\text{جا}$



5. ہندسی تشکیل سے ثابت کرو کہ

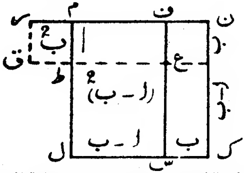
$$\text{ا}^2 + \text{ب}^2 = (\text{ا}+\text{ب})^2 - 2\,\text{اب}$$

مسئلہ 48

(اثباتی)

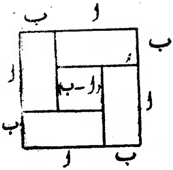
دو خطوطِ مستقیم کے فرق پر کا مُربّع اُن خطوط کے مُربّعوں کے مجموعے اور اُن کی دوچند سطح کے فرق کے برابر ہوتا ہے ؛

یعنی $(ا - ب)^2 = ا^2 + ب^2 - 2 ا \times ب$



مفروض	فرض کرو کہ ک ل ایک خطِ مستقیم ہے جس کا طول ا اکائیاں ہے اور دوسرے دیے ہوئے خط کا طول ب اکائیاں ہے ؛
مطلوب	$(ا - ب)^2 = ا^2 + ب^2 - 2 ا \times ب$
عمل	ک ل پر مُربّع ک ل م ن بناؤ ک س = ب کاٹو مستطیل ک س ف ن کو مکمل کرو خط ن م کو ر تک بڑھاؤ تاکہ م ر = ب، ف ع = ب کاٹو مستطیل ف ع ق ر کو مکمل کرو ؛
ثبوت	شکل ک م مُربّع ہے جس کا رقبہ $ا^2$ ہے " ط ر " " " " $ب^2$ " " س ط " " " $(ا - ب)^2$ ہے " ک ف مستطیل ہے جس کا رقبہ ا × ب ہے " ع ر " " " " ا × ب " اب شکل س ط = مُربّع ک م + مُربّع ط ر − مستطیل ع ر − مستطیل ک ت پس $(ا - ب)^2 = ا^2 + ب^2 - 2 ا ب$ (وہوالمطلوب)

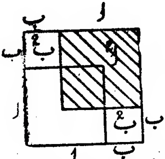
مشق 48



1 مُساواتِ مُتماثلۂ ذیل کی تشکیل وتوضیح کرو۔ اور ان کے متعلق ہندسی مسئلے الفاظ میں بیان کرو:۔

(۱) $(ا+ب)^2-(ا-ب)^2=4اب$

(2) $(ا+ب)^2-4اب=(ا-ب)^2$



2 بذریعۂ تشکیل ثابت کرو:۔

(۱) $(3+5)^2=(3-5)^2+3\times5\times4$

(2) $(ا-ب)^2+4اب=(ا+ب)^2$

(3) $(ا+ب)^2+(ا-ب)^2=2(ا^2+ب^2)$

3 ایک خط کو دو حصّوں میں تقسیم کیا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ حصّوں کی سطح سب سے بڑی ہوگی جب دونوں حصّے باہم مُساوی ہوں گے۔

4 تشکیل ہندسی سے ثابت کرو:۔

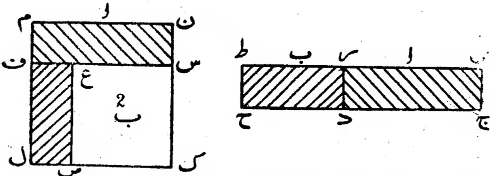
(۱) $(ا+ب)^2=(ا-ب)^2+4اب$

(2) $(ا-ب)^2=(ا+ب)^2-4اب$

مسئلہ 49

(اثباتی)

دو مربعوں کا فرق اپنے ضلعوں کے مجموعے اور فرق کی سطح کے برابر ہوتا ہے یعنی $ا^2 - ب^2 = (ا + ب)(ا - ب)$



مفروض	فرض کرو مربعوں کے ضلع کا طول ا ، ب اکائیاں ہے ۔
مطلوب	$ا^2 - ب^2 = (ا + ب)(ا - ب)$
عمل	خط $\overline{ک ل}$ = ا لو اور اس میں سے $\overline{ک ص}$ = ب کاٹو۔ مربع ک ل م ن ، ک ص ع س مکمل کرو۔ $\overline{س ع}$ کو بڑھاؤ کہ $\overline{ل م}$ کو ف پر ملے ۔ ظاہر ہے کہ $\overline{س ن} = \overline{ف م} = \overline{ع ف} = \overline{ص ل} = (ا - ب)$ اب ایک مستطیل ج د ر ی مستطیل س ف م ن کے برابر کھینچو۔ $\overline{ج د}$ کو ح تک بڑھاؤ تاکہ $\overline{د ح}$ = ب مستطیل د ح ط ر = ل ف ع ص کو مکمل کرو ۔
ثبوت	مربع ک م کا رقبہ $= ا^2$ " ک ع " $= ب^2$ مستطیل ج ط " $= (ا + ب) \times (ا - ب)$ مگر مربع ک م ـ مربع ک ع = مستطیل س م + مستطیل ص ف = مستطیل ج ر + مستطیل د ط = مستطیل ج ط پس $ا^2 - ب^2 = (ا + ب)(ا - ب)$ (فہو المطلوب)

مشق 49

1 ذیل کی مُساوات کی تشکیل کرو :-

(ا) $7^2-5^2=(7+5)(7-5)$

(ب) $\text{لا}^2-3^2=(\text{لا}+3)(\text{لا}-3)$ [جب $\text{لا} > 3$]

(ج) $\text{لا}^2-4\text{ی}^2=(\text{لا}+2\text{ی})(\text{لا}-2\text{ی})$ [جب $\text{لا} > 2\text{ی}$]

2 اگر مُستطیل اور مُربّع کے اِحاطے مُساوی ہوں تو مُربّع کا رقبہ مُستطیل سے بڑا ہو گا ۔

3 شکل سے ثابت کرو $55^2-25^2=2400$ اور اُس کے مُطابق عام ہندسی مسئلہ الفاظ میں بیان کرو ۔

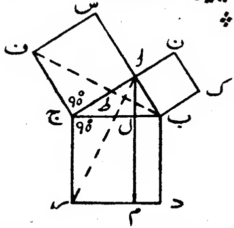
4 ایک خط دو مُساوی اور غیر مُساوی حِصّوں میں تقسیم کیا گیا ہے یہ ثابت کرو کہ غیر مُساوی حِصّوں کی سطح معہ مُربّع اُس خط کے جو نقاطِ تقسیم و تنصیف کے مابین ہے ۔ نِصف خط کے مُربّع کے برابر ہو گی ۔

5 اگر ایک خطِ مُستقیم کو تنصیف کر کے کسی نقطے تک خارج کیا جائے تو اس طرح بڑھائے ہوئے کُل خط اور خارج کردہ حِصّے کی سطح معہ مُربّع نصف خط کے برابر ہوں گے اس خط کے مُربّع کے جو نصف خط اور خارج کیے گئے حِصّے سے بنا ہے ۔

مسئلہ 50

حکیم فیثاغورث کا مسئلہ (اثباتی)

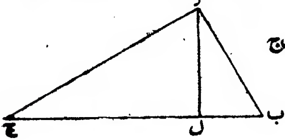
مثلث قائم الزاویہ میں وتر کا مربع باقی دو ضلعوں کے مربعوں کے مجموعے کے برابر ہوتا ہے ۔



مفروض	فرض کرو ا ب ج قائم الزاویہ مثلث ہے ۔ جس کا زاویہ ا قائمہ ہے ۔
مطلوب	ب ج^2 = ا ب^2 + ا ج^2 ۔
عمل	مربع جات ب ج ر د ، ا ج ف س ، ا ب ک ن مکمل کرو ۔ ا ل م ‖ ج ر کھینچو جو ب ج کو ل پر ملے ۔ ا ر اور ب ف کو ملاؤ ۔
ثبوت	∵ ب ا̂ ج اور ج ا̂ س دو قائمہ زاویے ہیں ∴ خط س ا ب مستقیم ہے ۔ △ن ج ب ف ، ر ج ا میں ج ف = ج ا ب ج = ج ر ف ج̂ ب = ا ج̂ ر (ہر ایک = 90° + ط̂) ∴ △ ب ج ف ≡ △ ر ج ا مگر مربع ج س = 2 △ ج ب ف اور مستطیل ج م = 2 △ ر ج ا پس مربع ج س = مستطیل ج م (مساویوں کے دُگنے) اسی طرح مربع ب ن = مستطیل ل د پس مربع ب ن + مربع ج س = مربع ج د یعنی ا ب^2 + ا ج^2 = ب ج^2 (فهو المطلوب)

نوٹ (۱) اگر ہم مثلث ب ج ف کو نقطہ ج کے گرد ایک قائمے میں سے گھمائیں تو یہ △ س ج ا کے ساتھ منطبق ہو جائے گا ۔ پس اس دلیل سے بھی ثابت کیا جا سکتا ہے کہ △ ب ج ف ≡ △ س ج ا

(2) اس مسئلے کو سب سے اوّل حکیم فیثاغورث نے ثابت کیا تھا۔ یہ مشہور یونانی ریاضی دان 2200 سال پہلے ہو چکا ہے ۔



نتیجہ صریح (۱) قائم الزاویہ مثلث ا ب ج میں جس کا اَ = 90°

$\overline{اب}^2 = \overline{بج}^2 - \overline{جا}^2$

$\overline{اج}^2 = \overline{بج}^2 - \overline{اب}^2$

نتیجہ صریح (2) قائم الزاویہ مثلث ا ب ج میں جس کا اَ = 90°

اگر ا ل وتر پر ارتفاع ہو تو $\overline{اب}^2 = \overline{لب} \times \overline{بج}$

اور $\overline{اج}^2 = \overline{جل} \times \overline{بج}$

اور $\overline{ال}^2 = \overline{بل} \times \overline{لج}$

مشق 50

(اَ کے متقابلہ ضلعے کی لمبائی طا ہے، بَ کے متقابلہ ضلعے کی لمبائی طب ہے اور جَ کے متقابلہ ضلعے کی لمبائی طج ہے)

1 قائم الزاویہ مثلث ا ب ج بناؤ۔ جس میں ج قائمہ ہو۔ جب :-

(i) طا = 4 سم، طب = 3 سم (ii) طا = 1.5 انچ، طب = 2 انچ

(iii) " = 8 "، " = 15 " (iv) " = 2.8 سم، طب = 4.5 سم

ہر صورت میں وتر کا طول بتاؤ اور جواب کی پڑتال پیمائش سے کرو ۔

2 قائم الزاویہ مثلث ا ب ج بناؤ جس میں ج قائمہ ہو جب :-

(i) طج = 6.5 سم، طا = 5.6 سم (ii) طج = 6.5 سم، طا = 6 سم

(iii) " = 3.7 انچ، " = 1.2 انچ (iv) " = 41 "، " = 9 "

ہر صورت میں باقی اضلاع کا طول بتاؤ اور جواب کی پڑتال پیمائش سے کرو ۔

3 ایک مُربّع بناؤ جس کا رقبہ دو دیے ہُوئے مُربّعوں کے مجموعے کے برابر ہو ٭

4 ″ ″ ″ ″ ایک ″ مُربّع سے دو چند ہو ٭

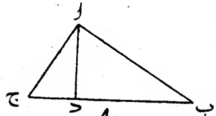
5 ″ ″ ″ ″ دو ″ مُربّعوں کے فرق کے برابر ہو ٭

6 ″ ″ ″ ″ ایک ″ مُربّع سے نصف ہو ٭

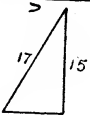
7 ثابت کرو کہ مُربّع کے وَتر پر کا مُربّع دِیے ہُوئے مُربّع سے دُگنا ہوتا ہے ٭

8 ثابت کرو کہ مُعیّن کے اِضلاع پر کے مُربّعوں کا مجموعہ اُس کے وَتروں پر کے مُربّعوں کے مجموعے کے برابر ہوتا ہے ٭

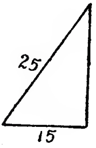
9 ثابت کرو کہ مُساوی الاضلاع مثلّث کے تینوں اضلاع پر کے مُربّعے مل کر اِرتفاع کے مُربّع سے چار چند ہوتے ہیں ٭



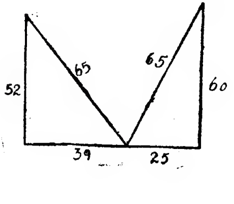
10 اب ج کوئی مثلّث ہے اور ا د اُس کا اِرتفاع، ثابت کرو۔
اب^2 − اج^2 = بد^2 − دج^2



11 ایک زینہ 17 فٹ لمبا ہے وُہ 15 فٹ اُونچی دیوار کے ساتھ سرے تک پہنچتا ہے۔ بتاؤ اُس کا پایہ دیوار سے کتنے فاصلے پر ہے ٭



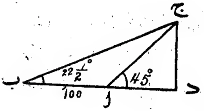
12 25 فٹ لمبا زینہ دیوار کے سرے تک پہنچتا ہے اگر اُس کا پایہ دیوار سے 15 فٹ کے فاصلے پر ہو۔ تو دیوار کی بلندی معلوم کرو ٭



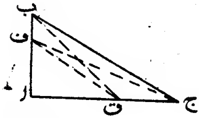
13 65 فٹ لمبا زینہ 60 فٹ دیوار کے سرے تک پہنچتا ہے اگر اُس کا پایہ ہلائے بغیر اُسے گلی کی دُوسری جانب لگا دیا جائے تو سامنے کی دیوار کے ساتھ 52 فٹ کی اُونچائی تک پہنچتا ہے۔ گلی کی چوڑائی معلوم کرو ٭

14 ایک 26 فُٹ لمبا زینہ کسی دیوار کے ساتھ عمُودًا کھڑا ہے۔ بتاؤ اُس کے قدم دیوار سے کتنی دُور ہٹائے جائیں کہ اُس کی چوٹی 2 فُٹ نیچی ہو جائے ؎

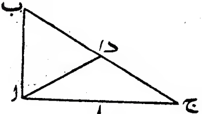
15 ایک کنّول کا پھُول تالاب کے پانی کی سطح سے اُوپر ½ فُٹ نکلا ہُوا تھا۔ ہوا کے جھونکوں سے وُہ جھکنے لگا۔ اگر اپنے اصلی مقام سے 1½ فُٹ کے فاصلے پر وُہ پانی کی سطح سے جا ملا ہو۔ تو پانی کی گہرائی بتاؤ ؎



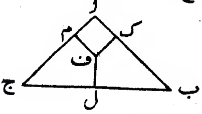
16 کسی مقام سے مینار کا زاویۂ ارتفاع 22½° ہے۔ اگر میں مینار کے پائے کی طرف 100 فُٹ چلوں تو زاویہ 45° ہو جاتا ہے۔ مینار کی بلندی معلوم کرو ؎



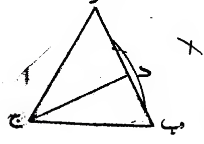
17 ا ب ج قائم الزّاویہ مثلّث ہے ف اور ق اضلاع اب، اج میں کوئی سے دو نقطے ہیں ثابت کرو (ب ق)² + (ج ف)² = (ب ج)² + (ف ق)²



18 ا ب ج قائم الزّاویہ مثلّث ہے جس کا زاویہ ا قائمہ ہے۔ د وتر ب ج کا نقطۂ وسطی ہے۔ ثابت کرو:-
4 اد² = اب² + اج²



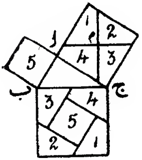
19 مثلّث ا ب ج کے اندر کسی نقطہ ف سے اب، ب ج، ج ا پر عمُود فک، فل، فم کھینچے گئے ہیں ثابت کرو:-
اک² + بل² + جم² = کب² + لج² + ما²



20 متساوی السّاقین مثلّث ا ب ج میں (اب = اج) نقطہ ج سے اب پر عمُود ج د گرایا گیا ہے۔ ثابت کرو:-
ب ج² = 2 اب × ب د

تجرباتی طریق پر مسئلہ فیثاغورث کا ثبوت

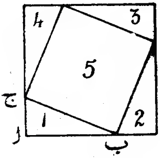
1 کسی موٹے کاغذ یا مقوّے پر ایک قائم الزّاویہ مثلّث ا ب ج بناؤ۔ جس کا
$\hat{ا} = 90^\circ$ اور اُس کے تینوں اِضلاع پر مُربّعے بناؤ۔

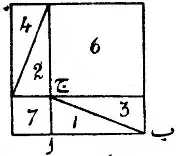


اب ا ج کے مُربّع کا مرکز م لو (جہاں دونوں وتر ایک دُوسرے کو کاٹتے ہیں) م سے ایک خط ب ج کے متوازی اور دُوسرا اُس پر عمود کھینچو۔ یہ مُربّع کو چار حصّوں 1، 2، 3، 4 میں تقسیم کریں گے جیسا شکل میں دکھایا گیا ہے۔ اگر یہ چاروں ٹکڑے اور دُوسرے ضلعے کا مُربّع کاٹ کر وتر کے مُربّع پر رکھے جائیں (جیسا شکل میں دکھایا گیا ہے) تو یہ پُورے پُورے اُس مُربّع کو بھر دیں گے۔

پس وتر کا مُربّع = ایک ضلع کا مُربّع + دُوسرے ضلع کا مُربّع (فہوالمطلوب)

2 ا ب ج ایک قائم الزّاویہ مثلّث ہے جس کا زاویہ $\hat{ا} = 90^\circ$ اب دو خط ایسے لو۔ جن میں سے ہر ایک کی لمبائی ا ب + ا ج کے برابر ہے اور اِن پر مُربّعے بناؤ۔ یہ مُربّعے باہم مساوی ہوں گے۔ دونوں مُربّعوں کو الگ الگ اِس طرح تقسیم کرو جس طرح شکل میں دکھلایا گیا ہے۔ ظاہر ہے کہ △ 1، 2، 3، 4 باہم برابر ہیں اگر ہر شکل میں سے چاروں مثلّث ساقط کر دیے جائیں تو ایک





میں شکل 5 رہ جائے گی اور دُوسری میں شکل 6، 7
پس شکل 5 = شکل 6 + شکل 7
یعنی $\overline{ب ج}^2 = \overline{ا ب}^2 + \overline{ا ج}^2$ (فہوالمطلوب)

مثلث کے تینوں اضلاع کے

ہم ثابت کریں گے کہ اگر مثلث اد

مقابل کا ضلع طب اور ج کے مقا

سے تعبیر کریں۔

یعنی ثم = $\frac{\text{طا} + \text{طب}}{2}$

ز مثلث کا رقبہ = √

فرض کرو مثلث کا ارتفاع اد

اب بحکم مسئلہ فیثاغورث

ع² + لا² = طج²

اور ع² + (طا − لا)² = ط

تفریق کرنے سے لا² − (طا

= طج² −

طا²

حل کرنے سے لا =

لیکن ع² = طج² − لا²

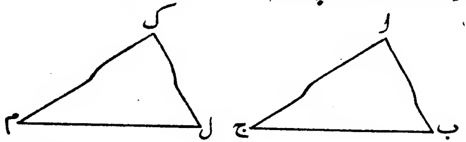
= طج² − (طا²

= (طج + طا² +

مسئلہ 51

(اثباتی)

اگر کسی مثلث کے ایک ضلع کا مربع باقی دو ضلعوں کے مربعوں کے مجموعے کے برابر ہو تو پہلے ضلع کے مقابل کا زاویہ قائمہ ہوگا۔



مفروض	فرض کرو △ اب ج میں $\overline{\text{ب ج}}^2 = \overline{\text{اب}}^2 + \overline{\text{اج}}^2$ ۔
مطلوب	زاویہ $\hat{\text{ا}}$ قائمہ ہے ۔
عمل	کوئی زاویہ قائمہ $\hat{\text{ک}}$ لو۔ فرض کرو اس کے بازو $\overline{\text{ک ل}}$ اور $\overline{\text{ک م}}$ ہیں ۔ $\overline{\text{ک ل}}$ کو $\overline{\text{اب}}$ کے برابر اور $\overline{\text{ک م}}$ کو $\overline{\text{اج}}$ کے برابر کاٹو۔ $\overline{\text{ل م}}$ کو ملاؤ ۔
ثبوت	∵ △ ل ک م قائم الزاویہ مثلث ہے ∴ $\overline{\text{ل م}}^2 = \overline{\text{ل ک}}^2 + \overline{\text{ک م}}^2$ (بحکم مسئلہ فیثاغورث) $= \overline{\text{اب}}^2 + \overline{\text{اج}}^2$ (بروئے عمل) $= \overline{\text{ب ج}}^2$ (بروئے مفروض) لہٰذا $\overline{\text{ل م}} = \overline{\text{ب ج}}$ اب مثلثان اب ج ، ک ل م میں $\overline{\text{اب}} = \overline{\text{ک ل}}$ ، $\overline{\text{اج}} = \overline{\text{ک م}}$ ، $\overline{\text{ب ج}} = \overline{\text{ل م}}$ لہٰذا △ن ≡ ہیں اور $\hat{\text{ا}} = \hat{\text{ک}}$ مگر $\hat{\text{ک}}$ قائمہ ہے ∴ $\hat{\text{ا}}$ بھی قائمہ ہے (فھوالمطلوب)

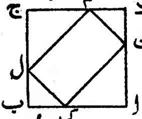
مشق 51

1 ثابت کرو کہ مندرجۂ ذیل اضلاع کے مثلث قائم الزاویہ ہیں :-

(1) طا = 7 ، طب = 6 ، طج = $\sqrt{13}$

(2) طا = 2 ، طب = 3 ، طج = $\sqrt{5}$

(3) طا = 3 ، طب = 4 ، ″ = $\sqrt{7}$

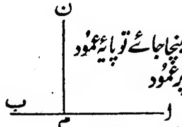


2 اب ج د ایک مربع ہے۔ جس کا ضلع 2 سم ہے۔ اک = ان = م ج = ج ل = 1.4 سم کاٹو۔ ثابت کرو کہ ک ل م ن مستطیل ہے ٭

3 کسی تکون میں اگر ارتفاع پر کا مربع قاعدے کے دونوں حصوں کی مستطیل کے برابر ہو تو ثابت کرو کہ قاعدے کے مقابل کا زاویہ قائمہ ہے ٭

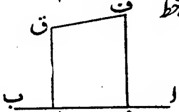
4 کسی قائم الزاویہ تکون کے تینوں ضلعوں پر کے مربعوں کے وتروں سے جو مثلث بنتا ہے وہ قائمۃ الزاویہ ہوتا ہے ٭

تظلیل

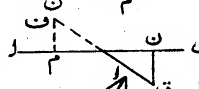


تعریف (1) اگر کسی نقطے سے کسی دیے ہوئے خط پر عمود کھینچا جائے تو پایۂ عمود کو نقطے کا ظل یا سایہ کہتے ہیں (نقطہ ن سے خط اب پر عمود ن م ڈالا جائے تو م کو نقطہ ن کا ظل کہیں گے)

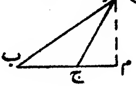
(2) اگر کسی محدود خط کے سروں سے کسی دیے ہوئے خط پر عمود کھینچے جائیں تو سروں کے ظلوں کے درمیانی حصے کو خط کا ظل یا سایہ کہتے ہیں ٭



مثال 1: اگر ف ق محدود خط ہو تو ف اور ق سے خط اب پر عمود ف م، ق ن کھینچو۔ حصہ م ن خط ف ق کا ظل ہے ٭

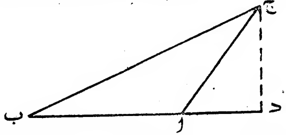


مثال 2: منفرجۃ الزاویہ △ اب ج میں اگر ا م قاعدہ ب ج پر عمود ہو تو اب کا ظل قاعدہ ب ج پر ب م ہوگا اور اج کا ظل قاعدہ ب ج پر ج م ہوگا ٭



مسئلہ 52

کسی منفرجۃ الزّاویہ مثلّث میں منفرجہ زاویہ کے مقابل کے ضلع کا مربّع باقی دو ضلعوں کے مربعوں سے بڑا ہوتا ہے بقدر دو چند اُس سطح کے جو باقی ضلعوں میں سے ایک ضلع اور اُس پر دُوسرے ضلع کا ظلّ مل کر بناتے ہیں ؂



مفروض — فرض کرو اب ج دیا ہُوا مثلّث ہے۔ جس کا زاویہ ا منفرجہ ہے ج د عمود ہے جو ب ا کو بڑھانے سے د پر ملتا ہے ا د ضلع ا ج کا ظلّ ہے

مطلوب — $\overline{\text{ب ج}}^2 = \overline{\text{ا ج}}^2 + \overline{\text{ا ب}}^2 + 2\,\overline{\text{ا ب}} \times \overline{\text{ا د}}$

ثبوت — ب د ج اور ا د ج قائم الزّاویہ مثلّث ہیں

$\therefore\ \overline{\text{ب ج}}^2 = \overline{\text{ب د}}^2 + \overline{\text{د ج}}^2$ (فیثاغورث)

اور $\overline{\text{ا ج}}^2 = \overline{\text{ا د}}^2 + \overline{\text{د ج}}^2$

پس تفریق کرنے سے

$\overline{\text{ب ج}}^2 - \overline{\text{ا ج}}^2 = \overline{\text{ب د}}^2 - \overline{\text{ا د}}^2$

$= (\overline{\text{ا ب}} + \overline{\text{ا د}})^2 - \overline{\text{ا د}}^2$

$= \overline{\text{ا ب}}^2 + 2\,\overline{\text{ا ب}} \times \overline{\text{ا د}}$

لہٰذا $\overline{\text{ب ج}}^2 = \overline{\text{ا ج}}^2 + \overline{\text{ا ب}}^2 + 2\,\overline{\text{ا ب}} \times \overline{\text{ا د}}$

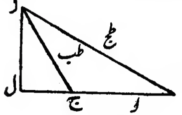
(فہو المطلوب)

مشق 52

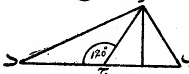
1 مثلث ا ب ج میں ا ب = 4 گ، ا ج = 3 گ، ب ا پر ا ج کا ظل 5 گ ہے
ب ج کا طول معلوم کرو جب ا منفرجہ زاویہ ہے ۔

2 مثلث ا ب ج میں ا ب = 5.5، ا ج = 6.5، ا ج کا ظل ب ا پر 2.5
ہے۔ ب ج کا طول معلوم کرو جب ا منفرجہ زاویہ ہے ۔

3 △ ا ب ج میں ا ب = 4 گ، ب ج = 5 گ اور ج ا = 3 گ بتاؤ ا ج کا
ظل خط ا ب پر کتنا لمبا ہے؟



4 △ ا ب ج میں اگر ج = 120° ثابت کرو
طج² = طا² + طب² + طا × طب

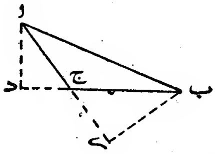


5 ا ب ج متساوی الاضلاع △ ہے
ب ج کو د تک بڑھایا گیا ہے تاآنکہ
ج د = ب ج ثابت کرو ا د² = 3 ا ج²

6 △ ا ب ج میں ا منفرجہ زاویہ ہے ا ب = ا ج، ج د ارتفاع ہے ۔
ثابت کرو ب ج² = 2 ا ب × ب د

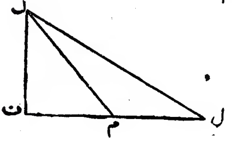
7 △ ا ب ج میں ا ب² > ب ج² + ج ا² ثابت کرو کہ ج منفرجہ زاویہ ہے ۔

8 ا ب ج مثلث ہے جس کا زاویہ ج
منفرجہ ہے ا اور ب سے بالمقابل
ضلعوں کے پائے عمود د اور س ہیں
ثابت کرو



ا ب² = ب ج × ب د + ا ج × ا س

9 ک ل م △ ہے م منفرجہ ہے
ک ف عمود ہے۔ اگر ک ل² = ک م² + 3 ل م²
تو ثابت کرو م خط ف ل کا وسطی نقطہ ہے

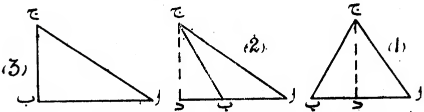


10 اگر △ ا ب ج کے وسطانیے ایک
دوسرے کو نقطہ م پر کاٹیں تو
ا ب² − ا ج² = 3 م ب² − 3 م ج²

مسئلہ 53

(اثباتی)

کسی مثلث میں حادہ زاویہ کے مقابل کے ضلع کا مربع باقی دو ضلعوں کے مربعوں سے چھوٹا ہوتا ہے بقدر دو چند اُس سطح کے جو باقی ضلعوں میں سے ایک ضلع اور اُس پر دوسرے ضلع کا ظل مل کر بناتے ہیں ۔



مفروض	فرض کرو ا ب ج دیا ہوا مثلث ہے جس کا زاویہ ا حادہ ہے ۔ ج د ارتفاع ہے جو ا ب کو د پر ملتا ہے اور ا د ضلع ا ج کا ظل ہے ۔ زاویہ ب شکل (1) میں حادہ شکل (2) میں منفرجہ شکل (3) میں قائمہ ہے ۔
مطلوب	$\overline{\text{ب ج}}^2 = \overline{\text{ا ج}}^2 + \overline{\text{ا ب}}^2 - 2\,\overline{\text{ا ب}} \times \overline{\text{ا د}}$ ۔
ثبوت	شکل (1)، (2) میں ب د ج اور ا د ج قائمۃ الزاویہ مثلث ہیں ۔ $\therefore \overline{\text{ب ج}}^2 = \overline{\text{ب د}}^2 + \overline{\text{د ج}}^2$ (فیثاغورث) اور $\overline{\text{ا ج}}^2 = \overline{\text{ا د}}^2 + \overline{\text{د ج}}^2$ // پس تفریق کرنے سے $\overline{\text{ب ج}}^2 - \overline{\text{ا ج}}^2 = \overline{\text{ب د}}^2 - \overline{\text{ا د}}^2$ $= (\overline{\text{ا ب}} - \overline{\text{ا د}})^2 - \overline{\text{ا د}}^2$ $= \overline{\text{ا ب}}^2 - 2\,\overline{\text{ا ب}} \times \overline{\text{ا د}}$ لہٰذا $\overline{\text{ب ج}}^2 = \overline{\text{ا ج}}^2 + \overline{\text{ا ب}}^2 - 2\,\overline{\text{ا ب}} \times \overline{\text{ا د}}$ شکل (3) میں $\overline{\text{ا د}} = \overline{\text{ا ب}}$ پس $\overline{\text{ب ج}}^2 = \overline{\text{ا ج}}^2 + \overline{\text{ا ب}}^2 - 2\,\overline{\text{ا ب}}^2$ $= \overline{\text{ا ج}}^2 - \overline{\text{ا ب}}^2$ جو بروئے فیثاغورث صحیح ہے ۔ (فھو المطلوب)

مشق 53

1 اگر مثلث کے دو ضلعے 15، 16 انچ ہوں اور اُن کا درمیانی زاویہ 60° ہو تو تیسرے ضلعے کی لمبائی انچوں میں بتاؤ۔

2 مثلث اب ج میں ا̂ = 60° ثابت کرو $\overline{\text{بج}}^2 = \overline{\text{اب}}^2 + \overline{\text{اج}}^2 - \overline{\text{اب}} \times \overline{\text{اج}}$

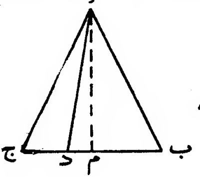
3 $\overline{\text{اب}} = 5''$، $\overline{\text{اج}} = 4''$، ا̂ = 60°، $\overline{\text{بج}}$ کی پیمائش بتاؤ۔

4 $\overline{\text{اب}} = 5$ سم، $\overline{\text{بج}} = 4\sqrt{2}$ سم، ب̂ = 45°، $\overline{\text{اج}}$ کی پیمائش بتاؤ۔

5 شکل کھینچنے کے بغیر بتاؤ کہ مندرجۂ ذیل اضلاع کے مثلث حادۃ الزّوایا ہیں۔ منفرجۃ الزّاویہ ہیں یا قائمۃ الزّاویہ:-

(1) 2، 3، 4 (2) 3، 5، 6

(3) 5، 7، 8 (4) 8، 15، 17



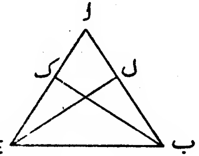
6 د کوئی نقطہ مثلث مساوی الساقین اب ج کے قاعدہ ب ج میں ہے۔ ثابت کرو

$\overline{\text{اب}}^2 = \overline{\text{اد}}^2 + \overline{\text{بد}} \times \overline{\text{جد}}$

7 چوکور اب ج د میں اگر $\overline{\text{اب}} \parallel \overline{\text{جد}}$ تو ثابت کرو $\overline{\text{اج}}^2 + \overline{\text{بد}}^2 = \overline{\text{اد}}^2 + \overline{\text{بج}}^2 + 2\,\overline{\text{اب}} \times \overline{\text{جد}}$

8 مثلث اب ج میں ب̂ اور ج̂ حادہ زاویے ہیں ب ک اور ج ل عمود ہیں $\overline{\text{اج}}$ اور $\overline{\text{اب}}$ پر ثابت کرو

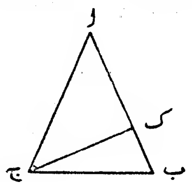
$\overline{\text{بج}}^2 = \overline{\text{اب}} \times \overline{\text{بل}} + \overline{\text{اج}} \times \overline{\text{جک}}$



9 مثال 8 میں ثابت کرو

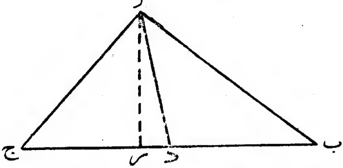
$\overline{\text{اج}} \times \overline{\text{اک}} = \overline{\text{اب}} \times \overline{\text{ال}}$

10 مثلث اب ج میں اگر $\overline{\text{اب}} = \overline{\text{اج}}$ تو ثابت کرو $\overline{\text{بج}}^2 = 2\,\overline{\text{اب}} \times \overline{\text{کب}}$ جہاں ک پائے عمود ہے ج ک کا ج سے $\overline{\text{اب}}$ پر کھینچا گیا ہے۔



مسئلہ 54
(اثباتی)

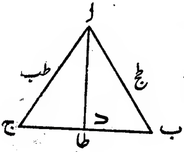
کسی مثلّث میں دو ضلعوں کے مربّعوں کا مجموعہ دوچند ہوتا ہے تیسرے نصف ضلع کے مربع اور اُس کے وسطانیہ کے مربّع کے مجموعے سے ؛



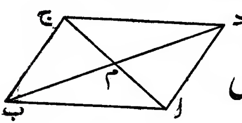
مفروض	فرض کرو اب ج △ ہے۔ جس کا وسطانیہ اد خط ب ج کی تنصیف کرتا ہے ؛
مطلوب	$\overline{\text{اب}}^2 + \overline{\text{اج}}^2 = 2\,\overline{\text{بد}}^2 + 2\,\overline{\text{اد}}^2$ ؛
عمل	$\overline{\text{اس}}$ خط $\overline{\text{ب ج}}$ پر عمود کھینچو ؛
ثبوت	△ اب د میں زاویہ اد ب منفرجہ ہے $\therefore \overline{\text{اب}}^2 = \overline{\text{بد}}^2 + \overline{\text{اد}}^2 + 2\,\overline{\text{بد}} \times \overline{\text{سد}}$ (1) پھر △ اد ج میں زاویہ اد ج حادّہ ہے۔ $\therefore \overline{\text{اج}}^2 = \overline{\text{دج}}^2 + \overline{\text{اد}}^2 - 2\,\overline{\text{دج}} \times \overline{\text{سد}}$ (2) لیکن $\overline{\text{بد}} = \overline{\text{دج}}$ ∴ (1) اور (2) کو جمع کرنے سے $\overline{\text{اب}}^2 + \overline{\text{اج}}^2 = 2\,\overline{\text{بد}}^2 + 2\,\overline{\text{اد}}^2$ (فهو المطلوب)

مشق 54

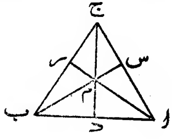
1. △ کے اضلاع 8 سم اور 16 سم ہیں اور اُس کا وسطانیہ 12 سم ہے۔ قاعدے کی پیمائش کرو۔
2. △ کے اضلاع 5، 12، 13 سم ہیں۔ اُس وسطانیہ کا طول معلوم کرو جو سب سے بڑے ضلع کی تنصیف کرتا ہے۔
3. △ کے وسطانیے معلوم کرو جس کے اضلاع 5، 6، 8 سم ہیں۔
4. △ کا سب سے چھوٹا وسطانیہ معلوم کرو جب اضلاع $4\frac{1}{2}$، 5، 7 ہیں۔
5. △ اب ج کا وسطانیہ اد ہے۔ $\overline{\text{اب}}=8$، $\overline{\text{اج}}=10$، $\overline{\text{اد}}=7$، $\overline{\text{بج}}$ کی پیمائش کرو۔



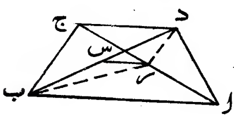
6. △ اب ج کے اضلاع طا، طب، طج ہیں۔ اگر اد وسطانیہ م کے برابر ہو تو ثابت کرو۔
$$\text{م}=\frac{1}{2}\sqrt{2\,\text{طب}^2+2\,\text{طج}^2-\text{طا}^2}$$
7. اگر مسئلہ 45 میں راسی نقطہ قاعدے میں واقع ہو تو مسئلہ کا دعویٰ کیا صورت اختیار کرے گا؟



8. متوازی الاضلاع کے ضلعوں پر کے مربعوں کا مجموعہ وتروں پر کے مربعوں کے مجموعے کے برابر ہوگا۔



9. ثابت کرو کہ △ کے وسطانیوں پر کے مربعوں کا مجموعہ اس کے اضلاع پر کے مربعوں کے مجموعے کا تین چوتھائی ہے۔

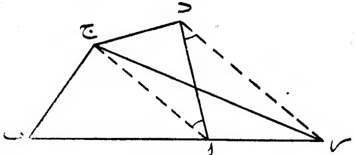


10. اب ج د چوکور ہے۔ جس کے وتر $\overline{\text{اج}}$، $\overline{\text{بد}}$ کے نقاطِ وسطی ر، س ہیں۔ ثابت کرو
$$\overline{\text{اب}}^2+\overline{\text{بج}}^2+\overline{\text{جد}}^2+\overline{\text{دا}}^2=\overline{\text{اج}}^2+\overline{\text{بد}}^2+4\,\overline{\text{رس}}^2$$

(رقبے کے مُتعلّق عملی مسائل)

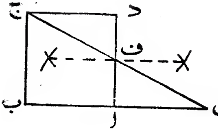
مسئلہ 55

مثلّث بنانا جو رقبے میں دی ہوئی چار ضِلعی شکل کے مُساوی ہو ؞



معلوم	چار ضِلعی شکل ا ب ج د
مطلوب	مثلّث بنانا جو رقبے میں ا ب ج د کے مُساوی ہو ؞
عمل	اج کو ملاؤ د سے خط دس خط اج کے مُتوازی کھینچو۔ جو با کو بڑھانے سے س پر ملے۔ جس کو ملاؤ۔ ب س ج مطلوبہ △ ہوگا ؞
ثبوت	مثلّثان ا س ج، ا د ج ایک ہی قاعدہ اج پر اور ایک ہی مُتوازی خطوط اج اور سد کے درمیان واقع ہیں ؞ پس رقبہ △ ا س ج = رقبہ △ ا د ج ∴ △ ا س ج + △ ا ب ج = △ ا د ج + △ ا ب ج یعنی △ ب س ج = شکل ا ب ج د (فہو المطلوب)

مشق 55



1 دیے ہُوئے مُربّع کو قائم الزّاویہ مثلّث میں تبدیل کرو ۔

2 دیے ہُوئے مستطیل کو قائم الزّاویہ مثلّث میں تبدیل کرو ۔

3 دیے ہُوئے ذوزنقہ کو مثلّث میں تبدیل کرو ۔

4 ||ع بناؤ جِس کے اِضلاع ۴اً اور ۳اً اور جِس کا رقبہ 9 مُربّع اِنچ ہو۔ مثلّث بناؤ جو رقبے میں اُس کے مُساوی اور جِس کے قاعدے پر کا ایک زاویہ 75° ہو۔

5 چوکور ا ب ج د کے مُساوی مثلّث بناؤ ۔ جب اب = 6 سم ، ب ج = ۵ سم ، اج = 7.2 سم ، ب$\hat{ا}$د = 10۵° اور ب د = 8 سم ۔

6 مثلّث بناؤ جِس کا رقبہ ذُوار بعتہ الاضلاع ک ل م ن کے برابر ہو ۔ جب ل م = 7 سم ، م ن = 6 سم ، ن ک = 2.75 سم ، ل$\hat{م}$ن = 60° اور م$\hat{ن}$ک = 90° ۔

7 دیے ہُوئے خط پر ایک ایسا مثلّث بناؤ جِس کا رقبہ دیے ہُوئے مثلّث کے مُساوی ہو ۔

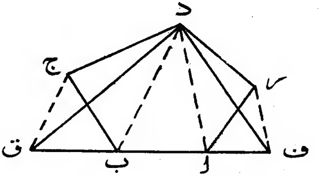
8 مثلّث بناؤ ۔ جِس کا رقبہ دو دیے ہوئے مثلّثوں کے مجمُوعے کے برابر ہو ۔
[دیے ہُوئے مثلّثوں میں سے پہلے ایک مثلّث کو اِس طرح تبدیل کرو کہ اِس کا ایک ضِلع دُوسرے مثلّث کے ایک ضلع کے برابر ہو جائے پھر دونوں کو اِس طرح رکھو کہ چوکور بن جائے ۔ پھر مسئلہ 55 کی طرح عمل کرو ۔]

9 چوکور ا ب ج د بناؤ ۔ جِس میں اب = اج = 2.0اً ، ب ج = ج د = 1.5اً اور اد = 1.0اً پھر ضِلع ب ج پر مثلّث بناؤ ۔ جِس کا رقبہ چوکور کے رقبے کے برابر ہو ۔

مسئلہ 56

(عملی)

مثلّث بنانا جو رقبے میں دیے ہُوئے کثیرُالاضلاع کے برابر ہو ؂



معلوم	دیا ہُوا کثیرُالاضلاع ا ب ج د س جِس کے پانچ ضِلعے ہیں ؂
مطلوب	مثلّث بنانا جو کثیرُالاضلاع سے مُساوی الرّقبہ ہو ؂
عمل	د ا کو ملاؤ۔ س سے س ف ‖ د ا کھینچو جو ب ا کو بڑھانے سے نقطہ ف پر ملے۔ ف د کو ملاؤ۔ اسی طرح د ب کو ملاؤ اور ج ق ‖ د ب کھینچو جو ا ب کو بڑھانے سے نقطہ ق پر ملے۔ د ق کو ملاؤ۔ تب د ف ق مطلوبہ △ ہوگا ؂
ثبوت	(۱) ∵ △ن د س ا، د ف ا ایک ہی قاعدہ د ا پر اور ایک ہی ‖ خطوط میں ہیں ∴ △ د س ا = △ د ف ا (۲) پھر △ن د ج ب، د ق ب ایک ہی قاعدہ د ب پر اور ایک ہی ‖ خطوط میں ہیں ؂ ∴ △ د ج ب = △ د ق ب لہٰذا △ د س ا + △ د ج ب = △ د ف ا + △ د ق ب دونوں طرف △ د ا ب جمع کرو ؂ پس △ د س ا + △ د ا ب + △ د ب ج = △ د ف ا + △ د ا ب + △ د ب ق یعنی شکل ا ب ج د س = △ د ف ق (فہو المطلوب)

نوٹ : خواہ کثیرُ الاضلاع کے کتنے ہی ضلعے ہوں ہم عمل مندرجۂ بالا کی طرح اس میں سے بار بار مثلّث کاٹ کر اُن کے مُساوی الرّقبہ مثلّث بڑھاتے جائیں گے تاکہ مطلوبہ مثلّث حاصل ہو ۔

مشق 56

1 مُخمّس ا ب ج د س بناؤ۔ جس میں ا ب = 3، ب ج = 2، ج د = 3، د س = 5.2، س ا = 3، ب ا س = 90° اور ا ب ج = 100° اِس کو مُساوی الرّقبہ مثلّث میں تبدیل کرو اور رقبہ نکالو ۔

2 مُخمّس ا ب ج د س بناؤ۔ جس میں ا ب = 2گ، ا س = 3گ، س ب = 4گ، ج س = 3گ، ب ج = 1.5گ، س د = 4گ اور ج د = 2گ اِس کو مثلّث میں تبدیل کرو ۔

3 مثلّث بناؤ۔ جس کا رقبہ اس منتظم مُسدّس کے برابر ہو جو 3گ نصف قُطر کے دائرے میں بنایا گیا ہے ۔

4 مثلّث بناؤ جو دیے ہُوئے غیر منتظم مُسدّس کے برابر ہو ۔

5 مثلّث بناؤ جس کا رقبہ تین دیے ہُوئے مثلّثوں کے مجموعے کے برابر ہو ۔

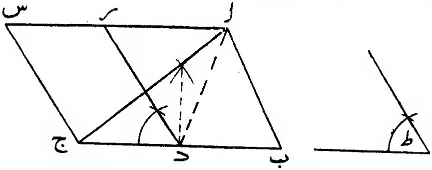
6 ایک منتظم مثمّن بناؤ۔ جس کا ہر ضلع 1گ ہو۔ پھر اُس کے مُساوی ایک مثلّث بناؤ ۔

7 ا ب ج د ی ف ایک کثیرُ الاضلاع بناؤ جس میں ا ب = 3 سم، ب ج = 2.5 سم، ج د = 3.2 سم، د ی = 2 سم، ا ج = 3.5 سم، ا د = 3.8 سم، ی ف = 2.1 سم، ا ف = 2.6 سم۔ پھر اس مُسدّس کو مثلّث میں تبدیل کرو ۔

مسئلہ 57

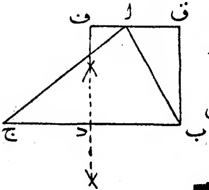
(عملی)

دیے ہُوئے مثلّث کے برابر ایک مُتوازی الاضلاع بنانا جس کا ایک زاویہ دیے ہُوئے زاویے کے برابر ہو ؛



معلُوم	ا ب ج دیا ہُوا مثلّث ہے اور دیا ہُوا زاویہ $\hat{ط}$ ؛
مطلُوب	مُتوازی الاضلاع بنانا جس کا رقبہ △ ا ب ج کے برابر ہو اور جس کا ایک زاویہ $= \hat{ط}$
عمل	(1) $\overline{ب ج}$ کی تنصیف نقطہ د پر کرو ؛ (2) د ر کھینچو۔ اِس طرح کہ ج $\hat{د}$ ر $= \hat{ط}$ ؛ (3) $\overline{ا ر س}$ ‖ $\overline{ب ج}$ کھینچو جو $\overline{د ر}$ کو نقطہ ر پر کاٹے ؛ (4) $\overline{ر س} = \overline{د ج}$ کاٹو اور $\overline{ج س}$ کو ملاؤ تب ج د ر س مطلوبہ ‖ع ہوگا
ثبُوت	△ ا ج د اور △ ا ب د کے قاعدے برابر ہیں اور اُن کا اِرتفاع بھی ایک ہی ہے ∴ △ ا د ج = △ ا ب د پس △ ا ب ج = ۲ △ ا ج د ‖ع ج د ر س اور △ ا ج د ایک ہی قاعدے پر اور ایک ہی مُساوی خطُوط کے اندر ہیں ؛ ∴ ‖ع ج د ر س = ۲ △ ا ج د ∴ ‖ع 〃 = △ ا ب ج نیز ج $\hat{د}$ ر = $\hat{ط}$ (بروئے عمل) پس ج د ر س مطلوبہ ‖ع ہے ؛ (فہو المطلوب)

نتیجۂ صریح: مُستطیل بناؤ۔ جِس کا رقبہ دِیے ہُوئے مثلّث کے برابر ہے۔



[ب ج کا عمُودی ناصف د ف نِکالو۔ راس ا سے ف ا ق ‖ ب ج کھینچو۔ جو د ف کو ف پر ملے۔ ف ق = د ب کاٹو۔ ق ب کو مِلاؤ۔ تب ب د ف ق مطلُوبہ مُستطیل ہوگا۔]

مشق 57

1 مثلّث بناؤ۔ جس کے اضلاع 4 سم، 5 سم اور 6 سم ہوں اور اُس کے مُساوی الرّقبہ مُستطیل بناؤ۔ اُس کے ایک وَتر کی پیمائش کرو۔

2 مُتساوی السّاقین مثلّث کو مُستطیل میں تبدیل کرو۔

3 کِسی مختلف الاضلاع مثلّث کو مُتساوی السّاقین مثلّث میں تبدیل کرو۔

4 کِسی مُستقیمۃ الاضلاع کے مُساوی ‖ع بناؤ۔ جِس کا ایک زاویہ دِیے ہُوئے زاویے کے برابر ہو۔

5 دِیے ہُوئے خط پر مثلّث بناؤ۔ جِس کا رقبہ دِیے ہُوئے مثلّث کے برابر ہو اور ایک زاویہ دِیے ہُوئے زاویے کے برابر ہو۔

6 چوکور ا ب ج د بناؤ۔ جب ا ب = 1.2 گ، ب ج = 1.5 گ، ج د = 1.7 گ، د ا = 1.3 گ اور ا ج = 1.9 گ۔ اب ایک مُستطیل بناؤ۔ جِس کا رقبہ مذکُورہ چوکور میں بنی ہُوئی △ ا ب ج کے برابر ہو اور اُس کے ضِلعوں کو ناپو۔

7 دِیے ہُوئے خط پر منتظم مُسدّس بناؤ اور اُس کے برابر ایک مثلّث بناؤ پھر اُس مثلّث کے مُساوی الرّقبہ ایک مُتوازی الاضلاع بناؤ۔

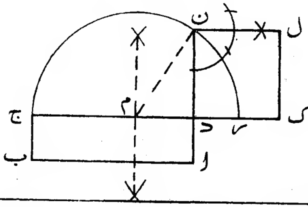
8 1.2 سم لمبے قاعِدے پر ایک مُثمّن منتظم بناؤ اور اُسے ایک مُساوی مُستطیل شکل میں تبدیل کرو۔

9 ا ب ج مثلّث معلُوم کے مُساوی الرّقبہ ایک مُعیّن بناؤ۔ جِس کا ایک وَتر دِیے ہُوئے خط کے برابر ہو۔

مسئلہ 58

(عملی)

مُربّع بنانا جس کا رقبہ دیے ہُوئے مستطیل کے برابر ہو ؁



معلوم	دیا ہُوا مستطیل ا ب ج د ؁
مطلوب	ا ب ج د کے مُساوی مُربّع بنانا ؁
عمل	(1) جد کو ر تک بڑھاؤ تاکہ در = دا ؁ (2) جر کی تنصیف م پر کرو ؁ (3) م کو مرکز مان کر مج کی دُوری سے نِصف دائرہ کھینچو ؁ (4) اد کو بڑھاؤ کہ نِصف دائرے کو ن پر ملے ؁ (5) دن پر مُربّع دکلن بناؤ۔ یہی مطلوبہ مُربّع ہوگا ؁
ثبوت	من کو ملاؤ ؁ مستطیل ا ب ج د = دج × اد = دج × در (بروئے عمل) = (مج + مد)(مر − مد) = (مر + مد)(مر − مد) [∵ مج = مر] = مر² − مد² = من² − مد² [∵ مج = من] = (مد² + دن²) − مد² فیثاغورث = دن² = مُربّع دکلن (فھو المطلوب)

مشق 58

1 مُستطیل بناؤ۔ جس کے اضلاع 1″ ، 2″ ہوں اور اس کے مُساوی ایک مُربّع بناؤ ۔

2 مُربّع بناؤ۔ جس کا رقبہ اُس مُستطیل کے برابر ہو۔ جس کے اضلاع 1.8″ اور 8″. ہوں۔ مُربّع کے ضلعے کی پیمائش کرو ۔

3 دی ہُوئی مستطیل کے برابر مُربّع بناؤ اور ثابت کرو کہ مُربّع کا اِحاطہ مُستطیل کے اِحاطے سے کم ہے ۔

4 مُربّع بناؤ جس کا رقبہ دیے ہُوئے مُربّع سے تگنا ہو ۔

5 ایک خط 3″ لو۔ اس کو اندرُونی طور سے اِس طرح تقسیم کرو کہ دونوں حصّوں کی سطح ایک اِنچ خط پر کھِچے ہُوئے مُربّع کے برابر ہو ۔

ایک خط $\overline{اب}$ = 3″ لو۔ اُس پر نِصف دائرہ کھینچو۔ ایک خط $\overline{ف ق}$ کھینچو جو $\overline{اب}$ کے مُتوازی ہو اور اُس سے 1″ فاصلے پر واقع ہو اور نِصف دائرہ ...کو ف ، ق میں کاٹے۔ ف سے خط $\overline{ف ل}$ خط $\overline{اب}$ پر عمُود کھینچو۔ تب $\overline{اب}$ ...رُونی طور پر اس طرح تقسیم ہوگا کہ $\overline{ال} \times \overline{ل ب} = \overline{ف ل}^2$ ۔

...رسی طور پر ایک خط کھینچو جس کا طُول $\sqrt{8}$ اِنچ ہو ۔

...شارہ : $\overline{ا د}$ = 4″ اور $\overline{د س}$ = 2″ لو

...معیّن کے وَتر 2.0″ اور 1.5″ معلُوم ہیں۔ مُعیّن بناؤ۔ اور اُسے ...ادی الرّقبہ مُربّع شکل میں تبدیل کرو ۔

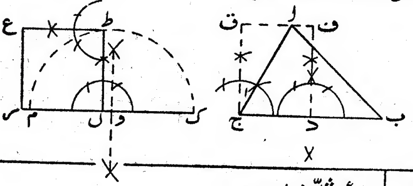
...ب ج ایک مثلّث بناؤ۔ جس میں $\overline{ا ط}$ = 1.6″ ، طب + طج = 2.4″ ، ... ا = 60° پھر اِس کے مُساوی الرّقبہ ایک مُربّع بناؤ ۔

...ب ج د ایک مُربّع ہے۔ جس کا رقبہ 5 مُربّع اِنچ ہے اس کے ...وی الرّقبہ ایک مستطیل بناؤ۔ جس کا عرض 1.5″ ہو ۔

مسئلہ 59

(عملی)

مُربّع بنانا جس کا رقبہ دیے ہُوئے مثلّث کے برابر ہو ۔



معلوم	دیا ہؤا مثلّث اب ج ۔
مطلوب	مُربّع بنانا جس کا رقبہ △ اب ج کے برابر ہو ۔
عمل	(۱) راس ا سے ف ا ق خط ب ج کے مُتوازی کھینچو ۔ (2) ب ج کی تنصیف نقطہ د پر کرو ۔ (3) د سے د ف عمُود کھینچو جو ف ا ق کو ف پر ملے ۔ (4) ج سے ج ق عمُود کھینچو جو ف ا ق کو ق پر ملے ۔ (5) ایک خط ک ل م لو ۔ جس میں ک ل = د ف اور ل م = د (6) ک م کی تنصیف نقطہ و پر کرو ۔ (7) و کو مرکز مان کر و ک کی دُوری سے نصف دائرہ کھینچو ۔ (8) ل سے عمُود ل ط نکالو جو دائرے کو ط پر ملے ۔ (9) ل ط پر مُربّع ل ط ع س بناؤ ۔ یہی مطلوبہ مُربّع ہو گا ۔
ثبوت	△ اب ج = $\frac{1}{2}$ ب ج × د ف = ج د × د ف (۱،۲) = ل م × ک ل = ط ل ^{2} = مُربّع ل ط ع س (فهو المطلوب)

مشق 59

1 مثلّث بناؤ جِس کا قاعِدہ = 1.4 گ اور اضلاع 1.3 گ، 1.6 گ ہوں۔ اس کو مُساوی الرّقبہ مُربّع میں تبدیل کرو۔

2 مثلّث بناؤ جِس کا قاعِدہ 5 سم اور اضلاع 5 سم اور 6 سم ہوں۔ اس کو مُساوی الرّقبہ مُربّع میں تبدیل کرو۔

3 6 سم قاعِدے پر مثلّث بناؤ جس کے قاعِدے پر کے زاویے 45° اور 60° ہوں۔ مثلّث کے مُساوی الرّقبہ ایک مُربّع بناؤ اور اس کے ایک ضلع کی پیمائش کرو۔

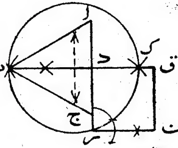
4 مثلّث ا ب ج بناؤ۔ جِس میں $\overline{\text{اب}}$ = 4 گ، $\overline{\text{ب ج}}$ = 3.1 گ اور $\overline{\text{ج ا}}$ = 2.2 گ ہو۔ △ کے مُساوی الرّقبہ ایک مُربّع بناؤ اور اس کے ضلع کی پیمائش کرو۔

5 مُنفرجتہُ الزّاویہ △ ا ب ج بناؤ۔ جِس میں زاویہ ب مُنفرجہ ہو۔ ا سے $\overline{\text{ب ج}}$ پر عمُود = 4 سم، $\overline{\text{اب}}$ = 5.1 سم اور $\overline{\text{ج ا}}$ = 7.3 سم۔ اس △ کے مُساوی الرّقبہ ایک مُربّع بناؤ اور اس کے ایک ضلع کی پیمائش کرو۔

6 مُساوی السّاقین △ بناؤ۔ جِس کا قاعِدہ = 5 سم اور قاعِدے پر کا ہر زاویہ راسی زاویے سے دوچند ہو۔ اس △ کے مُساوی الرّقبہ ایک مُربّع بناؤ۔

7 دِیے ہُوئے مثلّث مُساوی الاضلاع کے برابر مُربّع بناؤ۔

[$\overline{\text{ب د}}$ ⊥ $\overline{\text{اج}}$ کھینچو۔ $\overline{\text{ب د}}$ کو ک تک بڑھاؤ کہ $\overline{\text{دک}}$ = $\overline{\text{اد}}$، $\overline{\text{ب ک}}$ کو قطر مان کر اس پر دائرہ کھینچو۔ $\overline{\text{دج}}$ کو بڑھاؤ کہ دائرے کو س پر مِلے۔ $\overline{\text{دس}}$ پر مُربّع د س ف ق بناؤ۔ یہی مطلوبہ مُربّع ہوگا۔]



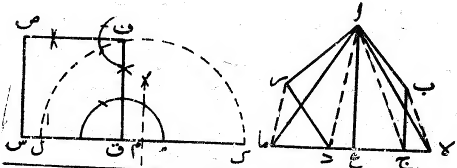
8 مُربّع بناؤ جِس کا رقبہ دِیے ہُوئے △ سے نِصف ہو۔

9 چوکور ا ب ج د بناؤ۔ جِس میں $\overline{\text{اب}}$ = 3.5 سم $\overline{\text{اج}}$ = 1.5 سم اور $\overline{\text{اد}}$ = 5 سم ہو اور ا$\hat{\text{ب}}$ج اور ا$\hat{\text{ج}}$د قائمہ زاویے ہوں ایک مُربّع بناؤ۔ جِس کا رقبہ چوکور کے برابر ہو اور اس مُربّع کے ضلع کی پیمائش کرو۔

مسئلہ 60

(عملی)

مُربّع بنانا جس کا رقبہ دِیے ہُوئے کثیرُالاضلاع کے برابر ہو ؎



معلوم	دیا ہُوا کثیرُالاضلاع ا ب ج د س ؎
مطلوب	ا ب ج د س کے مُساوی الرّقبہ مُربّع بنانا ؎
عمل	(1) ب لا کو ا ج کے متوازی اور س ما کو ا د کے مُتوازی کھینچو جو ج د کو بڑھانے پر لا اور ما میں کاٹیں ؎ (2) ا لا ، ا ما کو ملاؤ اور ا ع عمُود کھینچو ؎ تب △ ا لا ما کثیرُالاضلاع ا ب ج د س کے مُساوی ہے (3) ایک خط ک ل لو جس میں ک ق = ا ع اور ق ل = ½ لا ما ک ل کی تنصیف نقطہ م پر کرو ؎ م کو مرکز مان کر م ک کی دُوری سے دائرہ کھینچو ؎ ق سے ق ف عمُود کھینچو جو دائرے کو ف پر ملے ؎ ق ف پر مُربّع ف ق س ص بناؤ ؎ یہی مطلُوبہ مُربّع ہوگا ؎ (فہوَالمطلُوب)

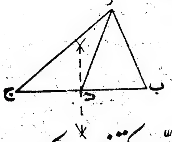
مشق 60

1 دیے ہوئے متوازی الاضلاع کے مساوی الرّقبہ ایک مربّع بناؤ۔
2 " " ذوزنقہ کے مساوی الرّقبہ مربّع بناؤ۔
3 ا ب ج ایک مثلث بناؤ۔ جس کا قاعدہ 2.4 اور قاعدے پر کے زاویے 45° اور 60° کے ہوں۔ پھر اس مثلث کے مساوی الرّقبہ ایک مربّع بناؤ اور اس کے ضلعے کو ناپو۔
4 دو مثلثوں کے مجموعے کے برابر مربّع بناؤ۔
5 مستطیل 2.5 سم × 4.5 سم بناؤ۔ پھر اس کے چھوٹے ضلعے پر باہر کی طرف ایک متساوی الاضلاع مثلث بناؤ۔ اس طرح جو مخمس بنا ہے اس کے برابر مربّع بناؤ۔
6 مربّع بناؤ۔ جس کا رقبہ ایسے منتظم مسدس کے برابر ہو۔ جس کا ضلع آ ہو۔
7 ایک معیّن بناؤ جس کا ضلع 4 سم اور ارتفاع 2.4 سم ہو اس معیّن کے مساوی الرّقبہ ایک مربّع بناؤ اور اس کا ضلع ناپ کر بتاؤ کہ وہ معیّن کے ضلعے سے کتنا بڑا یا چھوٹا ہے؟
8 ایک ذواربعۃ الاضلاع ا ب ج د بناؤ۔ جس میں $\overline{اب}$ = 3 سم، $\overline{اج}$ = 3.5 سم، $\overline{اد}$ = 2.5 سم، $\overline{جد}$ = 2.8 سم اور ا ب ج = 60° ہو۔ اس کے مساوی الرّقبہ ایک مربّع بناؤ اور اس کے ضلعے کی پیمائش کرو۔

حل شدہ عملی سوالات

1 مثلّث کے کسی راس سے خط کھینچ کر مثلّث کی تنصیف کرنا ۔

[فرض کرو △ ا ب ج ہے۔ ب ج خط کی تنصیف نقطہ د پر کرو۔ ا د کو ملاؤ یہی مطلوبہ ناصف ہے ۔]

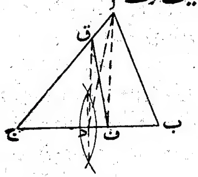


2 مثلّث کے کسی ضلعے میں ایک نقطہ دیا ہوا ہے اُس نقطے سے خط کھینچ کر مثلّث کی تنصیف کرنا ۔

معلوم: △ ا ب ج میں خط ب ج پر ایک نقطہ ف دیا ہوا ہے۔

مطلوب: خط ف ق کھینچنا جو △ کی تنصیف کرے

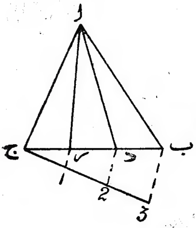
عمل: ب ج کی تنصیف د پر کرو
ا د اور ا ف کو ملاؤ۔ د سے
د ق خط ف ا کے ॥ کھینچو جو
ا ج کو ق پر ملے۔
ف ق کو ملاؤ۔ یہی مطلوبہ
خط ہوگا۔ ثبوت بہم پہنچاؤ ۔



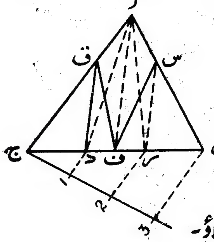
3 مثلّث کے کسی راس سے خط کھینچ کر مثلّث کی تثلیث کرنا ۔

[فرض کرو راس ا سے خط کھینچ کر مثلّث ا ب ج کی تثلیث مطلوب ہے]

عمل: قاعدہ ب ج کی تثلیث د، س پر کرو۔
یعنی ب د = د س = س ج
ا د، ا س کو ملاؤ۔
یہی خط مثلّث کی تثلیث کریں گے ۔



4 مثلث کے کسی ضلع میں ایک نقطہ دیا ہؤا ہے۔ اُس نقطے سے خط کھینچ کر مثلث کی تثلیث کرنا۔



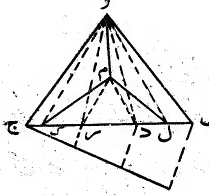
معلوم: △ ا ب ج کے ضلع ب ج میں کوئی نقطہ ف دیا ہؤا ہے۔

مطلوب: ف سے خطوط ف ق، ف س کھینچ کر مثلث کی تثلیث کرنا۔

عمل: ب ج کی تثلیث نقاط د، ر پر کرو۔ ا د، ا ف، ا ر کو ملاؤ۔ د، ر سے خطوط د ق، ر س خط ا ف کے ∥ کھینچو۔ ف ق، ف س کو ملاؤ۔ یہی خطوطِ تثلیث ہیں۔ ثبوت بہم پہنچاؤ۔

5 مثلث کے کسی اندرونی نقطے سے خطوط کھینچ کر مثلث کی تثلیث کرنا۔

معلوم: △ ا ب ج کے اندر کوئی نقطہ م دیا ہؤا ہے۔



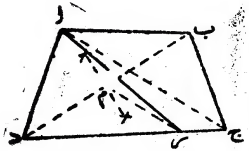
مطلوب: م سے ایسے خطوط کھینچنا جو مثلث کی تثلیث کریں۔

عمل: ب ج کی تثلیث نقاط د، ر پر کرو۔ م د، م ر کو ملاؤ۔ ا سے ا ل ∥ م د اور ا ک ∥ م ر کھینچو۔ جو ب ج کو نقاط ل، ک پر ملیں۔ م ا، م ک، م ل کو ملاؤ یہی خطوطِ تثلیث ہیں۔ ثبوت بہم پہنچاؤ۔

6 چوکور کے کسی کونے سے خط کھینچ کر اُس کی تنصیف کرنا۔

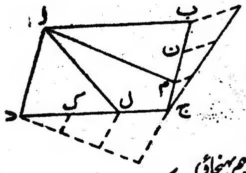
معلوم: اب ج د کوئی دیا ہوا چوکور ہے۔

مطلوب: ا سے خط اس کھینچ کر اُس کی تنصیف کرنا



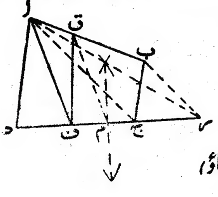
عمل: اج، ب د کو ملاؤ ب د کی تنصیف م پر کرو۔ م سے م س || اج کھینچو۔ جو د ج کو س پر ملے۔ ا س کو ملاؤ۔ یہی خط تنصیف ہے (ثبوت بہم پہنچاؤ)

7 متوازی الاضلاع کے ایک کونے سے دو خط کھینچ کر اُس کی تثلیث کرنا۔



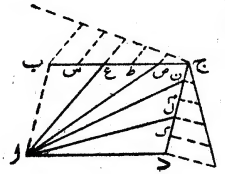
عمل: دج کی تثلیث نقاط ک، ل پر کرو۔ ب ج کی تثلیث نقاط م، ن پر کرو۔ ال اور ام کو ملاؤ۔ یہی خط تثلیث ہیں (ثبوت بہم پہنچاؤ)

8 چوکور کے ایک ضلعے کے کسی نقطہ ف سے خط کھینچ کر چوکور کی تنصیف کرنا۔



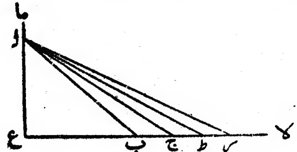
عمل: چوکور اب ج د کو مساوی مثلث ادس میں تبدیل کرو۔ دس کی نقطہ م پر تنصیف کرو۔ اف کو ملاؤ۔ م ق || اف کھینچو۔ ف ق کو ملاؤ۔ یہی مطلوبہ خط تنصیف ہے (ثبوت بہم پہنچاؤ)

۹ مُتوازی الاضلاع کے ایک کونے سے خط کھینچ کر اُسے چند (مثلاً 5) مُساوی حِصّوں میں تقسیم کرنا ۔



عمل : $\overline{\text{جد}}$ کو 5 مُساوی حِصّوں میں ک، ل، م، ن پر تقسیم کرو اور $\overline{\text{بج}}$ کو 5 مُساوی حِصّوں میں س، ع، ط، ص پر تقسیم کرو ۔ $\overline{\text{اع}}$، $\overline{\text{اص}}$، $\overline{\text{ان}}$، $\overline{\text{ال}}$ کو ملاؤ ۔ یہی خطوط مطلوبہ ہیں ۔ ثبوت بہم پہنچاؤ ۔

10 ہندسی طریق سے $\sqrt{2}$ ، $\sqrt{3}$ ، $\sqrt{4}$ ، $\sqrt{5}$ وغیرہ معلوم کرنا ۔



عمل : $\overline{\text{علا}}$ ، $\overline{\text{عما}}$ دو خطوطِ مُستقیم علی القوائم لو ۔

$\overline{\text{علا}}$ ، $\overline{\text{عما}}$ سے $\overline{\text{عب}}$ ، $\overline{\text{عا}}$ اکائی کے برابر کاٹو ۔

$\overline{\text{اب}}$ کو ملاؤ اور $\overline{\text{عج}} = \overline{\text{اب}}$ کاٹو

$\overline{\text{اج}}$ 〃 〃 $\overline{\text{عط}} = \overline{\text{اج}}$ 〃

$\overline{\text{اط}}$ 〃 〃 $\overline{\text{عس}} = \overline{\text{اط}}$ 〃

$\overline{\text{اس}}$ 〃 〃 یہی عمل جاری رکھو ۔

معلوم ہوگا کہ :

$\overline{\text{اب}} = \sqrt{2}$ ، $\overline{\text{اج}} = \sqrt{3}$ ، $\overline{\text{اط}} = \sqrt{4}$ ، $\overline{\text{اس}} = \sqrt{5}$ ہیں ۔

ثبوت :

$$\overline{\text{اب}} = \sqrt{\text{عب}^2 + \text{عا}^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$\overline{\text{اج}} = \sqrt{\text{عج}^2 + \text{عا}^2} = \sqrt{1+2} = \sqrt{3}$$

$$\overline{\text{اط}} = \sqrt{\text{عط}^2 + \text{عا}^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4}$$

$$\overline{\text{اس}} = \sqrt{\text{عس}^2 + \text{عا}^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$

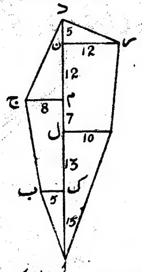
کھیت کا رقبہ نکالنا

ہم پہلے ثابت کر چکے ہیں کہ مثلث کا رقبہ = $\frac{1}{2}$ × قاعدہ × ارتفاع اور منحرف یا ذوزنقہ کا رقبہ = $\frac{1}{2}$ (متوازی اضلاع کا مجموعہ × ارتفاع) ان قاعدوں کی مدد سے ہم کسی غیر مستقیمۃ الاضلاع شکل یا کھیت کا رقبہ نکال سکتے ہیں ۔

قاعدہ: سب سے لمبا وتر کھینچو۔ اس کو اساسی خط کہتے ہیں۔ باقی کونوں سے اساسی خط پر عمود گراؤ۔ اب ساری شکل مثلثوں اور ذوزنقوں میں تقسیم ہو جائے گی۔ ان کے رقبوں کا مجموعہ مطلوبہ رقبہ ہوگا ۔

بیاض پیمائش
گز

	د کو	
	52	
	47	12 س
8 ج	35	
	28	س 10
5 ب	15	
	ا سے	



کھیت میں چار △ات اک ب، ال س، س ن د، ج م د اور ذوزنقہ ج م ک ب، س ن ل س ہیں۔

کل رقبہ = $8\times\frac{1}{2}+12\times5\times\frac{1}{2}+28\times10\times\frac{1}{2}+15\times5\times\frac{1}{2}$

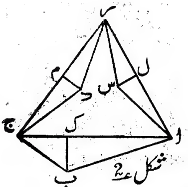
$(10+12)19\times\frac{1}{2}+(5+8)20\times\frac{1}{2}+17\times$

$= 614.5$ مربع گز

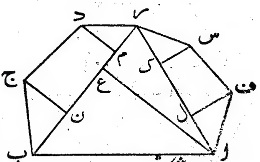
نوٹ: اراضی کی پیمائش مندرجۂ بالا طریق سے بیاض میں کی جاتی ہے۔ جیسے بیاض پیمائش کہتے ہیں۔ ب ک، ج م، س ن، س ل کو عمود یا آفسٹ کہتے ہیں۔ اساسی خط پر نقطہ ا سے فاصلے درج کیے جاتے ہیں دائیں طرف وہ آفسٹ لکھے جاتے ہیں جو دائیں جانب ہوں اور بائیں طرف وہ جو بائیں طرف کھچے ہوں ۔

نوٹ: بعض اوقات ایک سے زیادہ اساسی خط لینے میں سہولت رہتی ہے۔ جیسے

اشکال ذیل ہیں:



شکل ع2



شکل ع1

پہلی شکل میں دو اور دوسری میں تین اساسی خطوط لیے گئے ہیں۔ نیز دوسری شکل میں △ سر اج میں △ اب ج کا رقبہ جمع کرنا ہوگا اور △ اس سر اور △ ج د سر کے رقبے منہا کرنے ہوں گے ایسی صورتوں میں پہلے △ اسر ج قائم کرو۔

مشق

بیاض پیمائش سے میدان کا خاکہ بناؤ اور رقبے نکالو۔

1

	گز	
	100	
	90	15
20	80	
	60	30
60	40	

2

	کڑی	
	250	
40	215	
6,1	165	40
	130	30
50	90	

3

	کڑی	
	⊙ د تک	
	600	
	400	120 ج
100 ع	360	
	280	140 ب
160 ف	200	
	⊙ ا سے	

4

	گز	
	⊙ ا تک	
	500	
60 س	200	
	⊙ سر تک	
	300	
	140	100 د
	⊙ ج	
	بائیں طرف	
	⊙ ج تک	
	400	
	100	120 ب
	⊙ ا سے	

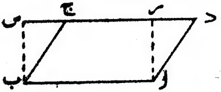
5

	گز	
	⊙ ا تک	
	500	
	380	150 b
	⊙ س سے	
	⊙ س تک	
	500	
175 ر	220	
	⊙ د سے	
	دائیں جانب	
	⊙ د تک	
	800	
100 ج	650	
200 ب	400	
	⊙ ا سے	

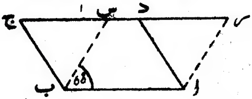
6

	کڑی ⊙ ا تک	
	250	
50	200	
	⊙ ج سے	
	⊙ ج	
	390	
40	200	
30	100	
	⊙ ب	
	⊙ ب	
	560	
30	100	
	⊙ ا سے	

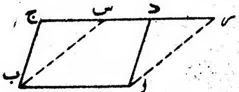
متفرق سوالات 3



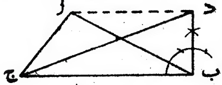
1 کوئی متوازی الاضلاع لو۔ اور اُس کے مساوی مستطیل بناؤ۔



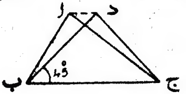
2 کوئی متوازی الاضلاع لو۔ اور اُس کے مساوی اُور ااع بناؤ۔ جس کا ایک زاویہ 60° ہو۔



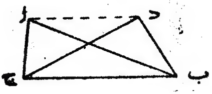
3 کوئی متوازی الاضلاع لو۔ اور اُس کے مساوی معیّن بناؤ۔



4 کوئی مثلث لو اور اس کے مساوی قائم الزاویہ مثلث بناؤ۔



5 کوئی مثلث لو اور اُس کے مساوی مثلث بناؤ۔ جس کا ایک زاویہ 45° کا ہو۔



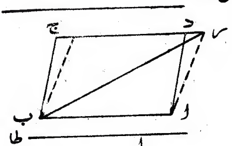
6 کوئی مثلث لو اور اُس کے مساوی اُسی قاعدے پر ایسا مثلث بناؤ۔ جس کا ایک ضلع اَ ہو۔

7 کسی متوازی الاضلاع کو پانچ مساوی متوازی الاضلاعوں میں تقسیم کرو۔

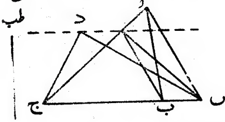
8 کسی دیئے ہوئے نقطہ ط سے خط کھینچ کر ااع ا ب ج د کی تنصیف کرو۔

(۱) جب طا اا ع کے کسی ضلع میں واقع ہو۔

(2) جب طا اا ع کے باہر ہو۔

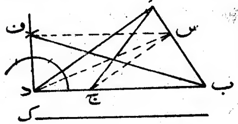


9 کوئی اا ع بناؤ اور اُس کے مُساوی ایک اور اا ع بناؤ۔ جس کا وُتر دی ہوئی لمبائی کا ہو ۞

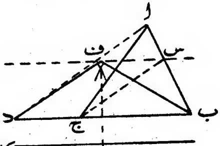


10 کوئی مثلّث اب ج لو۔ اور اس کے مُساوی مثلّث بناؤ جس کے دو ضلعے طا اور طب کے برابر ہوں ۞

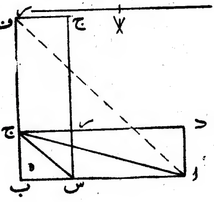
11 کوئی اا ع لو اور اُس کے مُساوی اا ع بناؤ۔ جس کے دونوں وُتر دی ہوئی لمبائی کے ہوں ۞



12 کوئی مثلّث اب ج لو اور اُس کے مُساوی قائم الزاویہ مثلّث بناؤ۔ جس کے قائمے کا ایک بازو ک ہو ۞

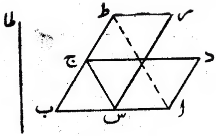


13 کوئی مثلّث اب ج لو۔ اور اس کے برابر ایسا مُتساوی الساقین مثلّث بناؤ۔ جس کا قاعدہ معلوم ہو ۞

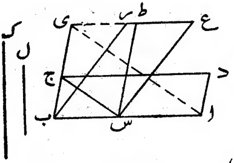


14 کسی مُستطیل کے مُساوی ایک مُستطیل بناؤ۔ جس کا ایک ضلع دیے ہوئے خط کے برابر ہو ۞

15 کوئی ||ع بناؤ اور اُس کے مُساوی ایسا ||ع بناؤ جس کا ایک ضلع طا کے برابر ہو ۔

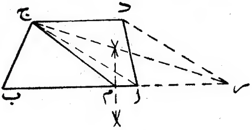


16 کوئی ||ع بناؤ اور اس کے مُساوی ایسا ||ع بناؤ جس کے دو ضلعے ک اور ل ہوں ۔

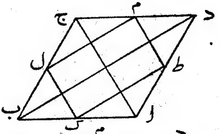


17 ||ع کے اضلاع 3 سم اور 4 سم ہیں اور اس کا زاویہ 60° ہے۔ اس کے مُساوی ||ع بناؤ۔ جس کے اضلاع 4.5 سم اور 3.5 سم ہوں۔ مؤخّر الذکر کا زاویہ حادّہ ناپو ۔

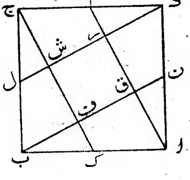
18 مُنحرف کے کسی کونے سے خط کھینچ کر اُس کی تنصیف کرو ۔

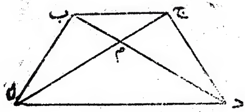


19 دیے ہُوئے مُعیّن کے نصف رقبے کے برابر مُستطیل بناؤ۔ پھر اس مُستطیل کو مُربّع میں تبدیل کرو ۔

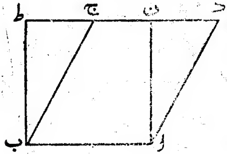


20 دیے ہُوئے مُربّع کو پانچ مُساوی حصّوں میں تقسیم کرو جن میں سے ایک مُربّع ہو اور چار قائم الزّاویہ مثلّث ۔

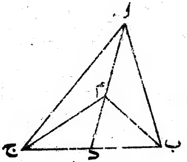




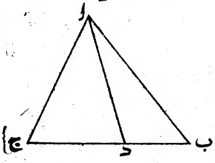
21 اگر خطوط اج ، ب د ایک دُوسرے کو نقطہ م پر قطع کریں اس طور پر کہ :-
△ ام ب = △ ج م د ،
ا د ، ب ج کے مُتوازی ہوگا ۔



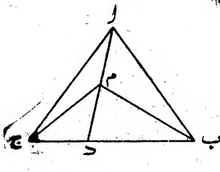
22 ایک اا ع اور مُربّع ایک ہی قاعدے پر واقع ہیں اور ایک ہی اا خطوط میں ہیں۔ ثابت کرو کہ اا ع کا احاطہ مُربّع کے اِحاطے سے بڑا ہے ۔



23 م کوئی نقطہ △ اب ج کے وسطانیہ ا د پر واقع ہے ثابت کرو △ اب م = △ اج م ۔



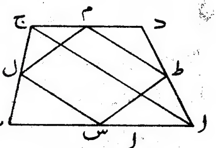
24 مثلّث اب ج کے قاعدہ ب ج میں ایک نقطہ د ہے۔ اِس طور پر کہ ب د = $\frac{2}{5}$ ب ج ثابت کرو کہ
△ اب د = $\frac{2}{5}$ △ اد ج



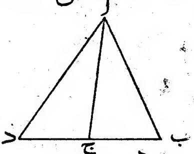
25 ا د کوئی خط △ اب ج کے راس سے قاعدے تک کھینچا گیا ہے ۔ م اُس کا وسطی نقطہ ہے۔ ثابت کرو کہ
△ م ب ج = $\frac{1}{2}$ △ اب ج ۔

26 اگر دو مُساوی خط علی القوائم قطع کریں تو ان کے راسوں کو مِلانے سے جو چوکور بنے گا۔ اُس کا رقبہ اس مُربّع کا نصف ہوگا۔ جو ان میں سے کسی خط پر بنایا جائے

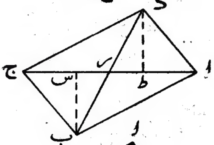
27 کسی چوکور کے مُتصِلہ اضلاع کے وسطی نقاط مِلانے سے جو دُوسرا چوکور بنتا ہے اُس کا رقبہ پہلے چوکور سے نصف ہوگا ؂



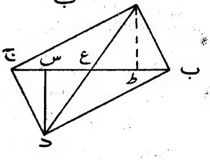
28 اگر ایک مثلّث کے دو ضلعے فرداً فرداً دُوسرے مثلّث کے دو ضلعوں کے برابر ہوں اور اُن کے درمیانی زاویے ایک دُوسرے کا تتمّہ ہوں تو دونوں مثلّث رقبے میں مُساوی ہوں گے ؂



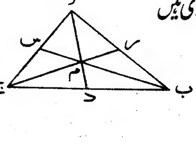
29 چوکور ا ب ج د کا وتر اج چوکور کی تنصیف کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ وتر ب د کی بھی تنصیف کرے گا۔ اس کا عکس بھی بیان کرو ؂



30 چوکور کا ایک وتر اُس کی تنصیف کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ اس کے فاصلے دُوسرے دونوں کونوں سے مُساوی ہیں ؂

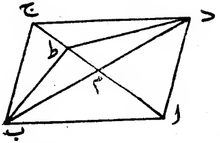


31 دونوں مثلّث ایک ہی خط پر مُختلف سمتوں میں واقع ہیں اگر قاعدہ ان کے راسوں کے مِلانے والے خط کی تنصیف کرتا ہے۔ تو ثابت کرو کہ △ مُساوی ہیں اُس کا عکس بھی بیان کرو اور ثابت کرو ؂

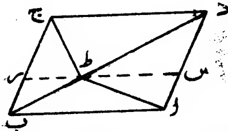


32 △ ا ب ج میں ایک نقطہ م ایسا معلوم کرو کہ △ن م ا ب، م ب ج، م ج ا

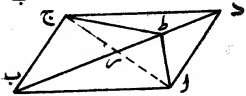
مُساوی الرّقبہ ہوں ؂



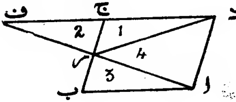
33 مُتوازی الاضلاع اب ج د کے وَتر
اج میں کوئی نقطہ ط ہے۔ ثابت کرو
△ اطب سے △ ب ط ج = △
ب ط د ؂



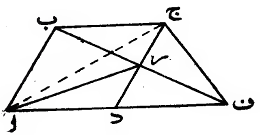
34 ااع اب ج د کے اندر کوئی نُقطہ
ط ہے۔ ثابت کرو △ ط اب + △
ط ج د = $\frac{1}{2}$ ااع اب ج د، اگر
ط ااع سے باہر ہو تو یہ ارتباط کیا ہوگا؟



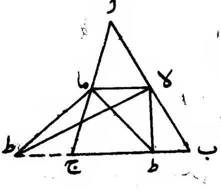
35 ااع اب ج د کے وَتر ب د میں ط
کوئی نُقطہ ہے۔ ثابت کرو △ن
اب ط اور ب ج ط مُساوی الرّقبہ ہیں ؂



36 ااع اب ج د میں ر ضلع ب ج
کا وسطی نقطہ ہے اگر ا ر اور د ج
بڑھ کر نقطہ ف پر ملیں تو ثابت کرو
△ د ر ف = $\frac{1}{2}$ ااع اب ج د ؂

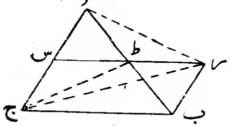


37 اب ج د ااع ہے۔ ر ضلع
د ج میں کوئی نُقطہ ہے۔ ب ر
اور ا د بڑھ کر نُقطہ ف پر ملتے
ہیں۔ ثابت کرو کہ :۔
△ ا د ر = △ ج ر ف ؂

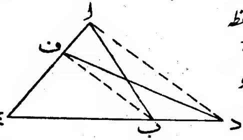


38 لا اور ما △ اب ج کے
اضلاع اب، اج کے وسطی نقاط
ہیں۔ ب ج میں اندر یا باہر کوئی
نقطہ ط ہے۔ ثابت کرو کہ رقبہ
△ لا ما ط ہمیشہ وہی رہے گا ؂

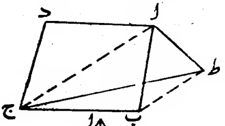
39 △ اب ج کے ضلع اج میں
کوئی سا نقطہ س لیا گیا ہے خط



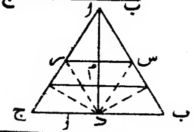
س ط ر خط ب ج کے مُتوازی اور
مُساوی کھینچا گیا ہے جو ا ب کو ط پر
ملتا ہے ثابت کرو مثلث
ا ط ر = △ ج س ط



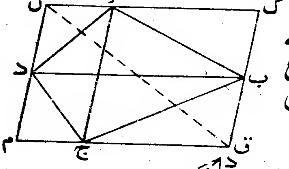
40 مثلث ا ب ج میں ف کوئی نقطہ
ضلع ا ج پر واقع ہے۔ ب ج
میں کوئی نقطہ د ایسا معلوم کرو
کہ مثلث ف ج د = △
ا ب ج ۔



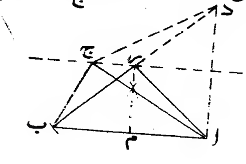
41 ا ب ج د کوئی چوکور ہے۔ ط
کوئی ایسا نقطہ ہے کہ چوکور
ا ط ج د = چوکور ا ب ج د،
ط کا طریق النقاط معلوم کرو ۔



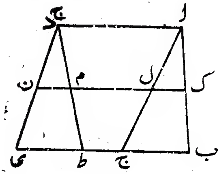
42 △ ا ب ج کا وسطانیہ ا د
ہر اُس خط کی تنصیف کرتا ہے
جو اضلاع کے درمیان قاعدہ
ب ج کے مُتوازی کھینچا جائے ۔



43 چوکور کا رقبہ اُس مثلث کے رقبے
کے برابر ہوگا جس کے دو اضلاع
چوکور کے وتروں کے برابر اور اُن
کے مُتوازی ہوں ۔



44 اُن تمام مثلثوں میں جو مُساوی الرقبہ
ہیں اور ایک ہی قاعدے پر بنائے
گئے ہیں متساوی الساقین کا
احاطہ سب سے چھوٹا ہوگا ۔



45 اگر دو مثلّث ایک ہی خط پر کے قاعدوں پر اور ایک ہی متوازی خطوط کے درمیان واقع ہوں۔ تو باقی اضلاع ہر اُس خط کو جو قاعدوں کے متوازی کھینچا جائے گا برابر کے ٹکڑوں میں تقسیم کریں گے۔

46 مندرجۂ ذیل مساوات کی ہندسی تشکیل کرو:-

$(ا+ب)^2 = ا(ا+ب) + ب(ا+ب)$

47 $(ا+ب)\times(ا-ب) + ب^2 = ا^2$

48 $(ا+ب)^2 - (ا-ب)^2 = 4ا\times ب$

49 $(لا-4)^2 = لا^2 - 8لا + 16$

50 اگر ایک خط پر چار نقاط ا، ب، ج، د علی الترتیب لیے جائیں تو

$\overline{اج}\times\overline{بد} = \overline{اب}\times\overline{جد} + \overline{اد}\times\overline{بج}$ ؎

51 اگر خط $\overline{اب}$ کی تنصیف نقطہ د پر کی جائے اور لا کوئی اور نقطہ $\overline{اب}$ میں ہو تو

$الا^2 + لاب^2 = 2اد^2 + 2لاد^2$ ؎

52 $\overline{اب}$ کی تنصیف نقطہ د پر کی گئی ہے اور اُسے لا تک بڑھایا گیا ہے۔ ثابت کرو $\overline{اد}\times\overline{الا} - \overline{بد}\times\overline{بلا} = 2اد^2$ ؎

53 اب ج کوئی خط مستقیم ہے۔ ثابت کرو کہ

$اج^2 + اب^2 = 2\overline{اج}\times\overline{اب} + بج^2$ ؎

54 خطِ مستقیم $\overline{اب ج}$ پر لا اور ما کوئی دو نقاط ہیں۔ اس طور پر کہ $\overline{الا} = ماب$ ثابت کرو۔

$اب^2 + لاما^2 = 2الا^2 + 2لاب^2$ ؎

55 اب کی تثلیث نقاط لا و ما پر کی گئی ہے۔ ثابت کرو

$اب^2 = الا^2 + 2لاب^2$ ؎

56 خط $\overline{اب}$ کو ل پر اس طرح تقسیم کیا گیا ہے کہ $\overline{اب}\times\overline{بل} = ال^2$ اور $\overline{ال}$ پر ایسا نقطہ م لیا گیا ہے کہ $\overline{لم} = \overline{لب}$ ثابت کرو کہ

$\overline{ال}\times\overline{لم} = لم^2$

57 خط $\overline{اب}$ کی تثلیث نقاط ج، د پر کی گئی ہے اور اُسے ر تک بڑھایا گیا

ہے۔ ثابت کرو ج س × د س = ا س × ب س + 2 اج² ۞

58 اگر اب کو ط پر اس طرح تقسیم کیا جائے کہ اب × ب ط = اط² تو ثابت کرو اب² + ب ط² = 3 اط² ۞

59 اگر اب کو ج پر اس طرح تقسیم کیا جائے کہ اب × ب ج = اج² ۔ ثابت کرو کہ خط (اب + ب ج) پر کا مربع = 5 اج² ۞

60 اگر خط اب کو لا اور ما پر کوئی سے تین حصوں میں تقسیم کیا جائے تو ایسا مستطیل معلوم کرو جس کا رقبہ = ا لا × لا ما + لا ما × ما ب + لا ما² ۞

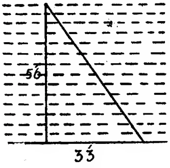
61 ایک زینہ جس کا پایہ مکان سے 16 فٹ کے فاصلے پر ہے 63 فٹ اونچی کھڑکی تک پہنچتا ہے۔ زینے کی لمبائی معلوم کرو ۞

62 ایک زینہ جس کی لمبائی 41 فٹ ہے۔ ایک کھڑکی تک پہنچتا ہے جس کی بلندی 40 فٹ ہے۔ دیوار کے پائین سے زینے کے پائے کا فاصلہ معلوم کرو ۞

63 ایک کھمبے کو کھڑا رکھنے کے لیے زمین سے 8 فٹ اونچائی پر تار سے باندھا گیا ہے۔ تار کا دوسرا سرا 15 فٹ کے فاصلے پر زمین میں گڑا ہے۔ تار کی لمبائی بتاؤ ۞

64 ایک جہاز 21 میل شمال کو جاتا ہے۔ پھر 20 میل مشرق کو۔ بتاؤ وہ پہلے مقام سے کس قدر فاصلے پر ہے؟

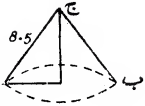
65 کوئی لڑکا ایک سیدھی نہر میں جس کا عرض 56 ہے تیرتا ہے پانی کی رو اسے 33 فٹ نیچے کی طرف بہا لے جاتی ہے۔ بتاؤ وہ پہلے مقام سے کتنا فاصلہ طے کرے گا؟



66 مساوی الاضلاع مثلث کا ایک ضلع 10 فٹ ہے۔ ارتفاع معلوم کرو ۞

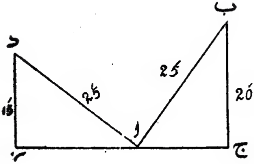
67 ایک مساوی الساقین مثلث کا قاعدہ 6 سم ہے اور اس کا ہر مساوی ضلع 5 سم ہے۔ ارتفاع معلوم کرو ۞

68 کسی مخروط مستقیم کے قاعدے کا نصف قطر 4 گ ہے اور اس کی



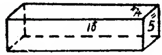
طرف مائل 8.5 ہے۔ اِرتفاع
معلوم کرو ؛

69 25 فُٹ لمبا زینہ گلی کے ایک
طرف 20 فٹ بلند کھڑکی تک
پہنچتا ہے اگر زینے کو اُلٹ کر
دُوسری طرف لگایا جائے تو 15
فٹ بلند کھڑکی تک پہنچتا ہے
گلی کی چوڑائی معلوم کرو ؛



70 37 فٹ لمبا زینہ گلی کے ایک
طرف 35 فٹ بلند دیوار تک پہنچتا ہے اگر زینے کو دُوسری طرف لگایا
جائے تو 12 فٹ بلند کھڑکی تک پہنچتا ہے۔ گلی کی چوڑائی معلوم کرو ؛

71 اینٹ کے اِمتداد $16'' \times 5'' \times 4''$
ہیں۔ اُس کے اطراف کے وَتر نکالو
اور ساری اینٹ کا وَتر بتاؤ ؛



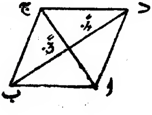
72 مُربّع بناؤ۔ جس کا رقبہ اُن دونوں
مُربّعوں کے مجموعے کے برابر ہو جن کے اضلاع $2.3''$ اور $4.65''$ ہیں ؛

73 مُربّع بناؤ۔ جس کا رقبہ دو مُربّعوں کے فرق کے برابر ہو۔ جن کے اضلاع
10 سم، 6 سم ہیں ؛

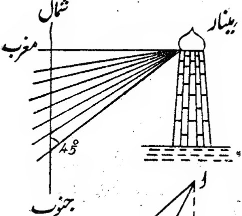
74 ایسے خط کھینچو جن کے طول
(i) $\sqrt{5}$ (ii) $\sqrt{17}$ (iii) $\sqrt{61}$ (iv) $\sqrt{11}$
(v) $\sqrt{33}$ (vi) $\sqrt{48}$ اِکائیاں ہوں ؛

75 ایسا خط کھینچو۔ جس پر کا مُربّع کسی دِیے ہوئے مُربّع سے دس گُنا ہو ؛

76 مُعیّن کا ضلع معلوم کرو۔
جب وَتر $6''$ اور $8''$ ہوں۔
اور اُس کے مساوی الرقبہ
مُربّع بناؤ ؛

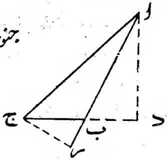


77 روشنی کا مینار مغرب سے جنوب مغرب تک روشنی پھیلاتا ہے۔ ایک جہاز جنوب کو 100 میل فی گھنٹہ کی رفتار سے جاتے ہوئے پہلی شعاع 10 بجے رات کو دیکھتا ہے اور $10\frac{1}{2}$ بجے روشنی غائب ہو جاتی ہے۔ بتاؤ $10\frac{1}{2}$ بجے جہاز کا فاصلہ مینار سے کس قدر تھا؟



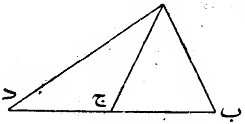
78 ا ب ج ایک △ ہے۔ جس کا زاویہ ب منفرجہ ہے ا د اور ج س عمود ہیں۔ جو ب ج اور ا ب پر گرائے گئے ہیں۔ ثابت کرو

ب ج × ب د = ا ب × ب س

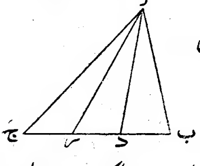


79 متساوی السّاقین △ ا ب ج کا قاعدہ ب ج نقطہ د تک بڑھایا گیا ہے۔ اس طور پر کہ ج د = ب ج ثابت کرو

ا د² = ا ج² + 2 × ب ج² ✤



80 ایک متساوی السّاقین △ ا ب ج قاعدہ ب ج پر واقع ہے۔ ب س عمود ہے جو ب سے ا ج پر گرایا گیا ہے ثابت کرو ب س² = 2 ا س × س ج + س ج² ✤



81 ا ب ج △ ہے د اور س دو نقاط ب ج میں ہیں۔ اس طرح کہ ب د = د س = س ج

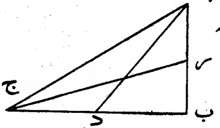
(i) 2 ا ج² + ا ب² = 6 ج س² + 3 ا س²

(ii) ا ب² + ا ج² = ا د² + ا س² + 4 د س² ✤

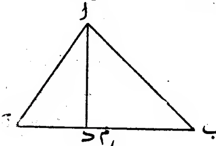
82 ا ب ج مساوی الاضلاع △ ہے ا ب کو د تک بڑھایا گیا ہے۔ اس طرح کہ ب د = 2 ا ب ثابت کرو کہ ج د پر کا مربّع ا ب پر کے مربّعے سے 7 گنا ہے ✤

83 اگر وتر $\overline{\text{اب}}$ پر ایک ہی طرف دو قائم الزاویہ △ ا د ب اور ا س ب بنائے جائیں اور $\overline{\text{دس}}$ کو بڑھا کر اس پر ا اور ب سے عمود $\overline{\text{اف}}$ اور $\overline{\text{بق}}$ گرائے جائیں تو ثابت کرو کہ $\overline{\text{دف}}^2 + \overline{\text{دق}}^2 = \overline{\text{سف}}^2 + \overline{\text{سق}}^2$ ۔

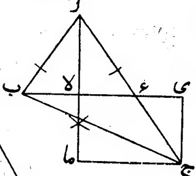
84 قائم الزاویہ مثلث کے وتر اور ایک ضلع کا مجموعہ اور اُن کا فرق دیا گیا ہے ثابت کرو کہ مستطیل جس کے اضلاع اس مجموعے اور فرق کے برابر ہوں ۔ دُوسرے ضلع کے مُربّع کے برابر ہوگا ۔



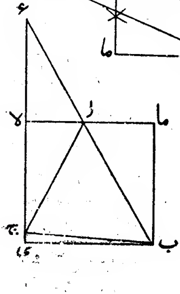
85 قائم الزاویہ مثلث کا زاویہ ب قائمہ ہے اور $\overline{\text{اد}}$ اور $\overline{\text{جس}}$ وسطانیے ہیں۔ ثابت کرو کہ
$4(\overline{\text{اد}}^2 + \overline{\text{جس}}^2) = 5\,\overline{\text{اج}}^2$ ۔



86 اب ج کوئی مثلث ہے ۔ جس میں $\overline{\text{اب}} > \overline{\text{اج}}$ اور $\overline{\text{اد}}$ خط $\overline{\text{بج}}$ پر عمود ہے اور م، $\overline{\text{بج}}$ کا وسطی نقطہ ہے۔ ثابت کرو کہ
$\overline{\text{اب}}^2 - \overline{\text{اج}}^2 = 2\,\overline{\text{دم}} \times \overline{\text{بج}}$ ۔

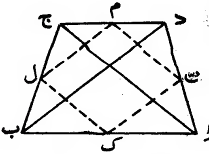


87 اب ج کوئی مثلث ہے۔ زاویہ ا کے ناصف پر $\overline{\text{بلا}}$ اور $\overline{\text{جما}}$ عمود ہیں۔ ثابت کرو۔
$\overline{\text{بج}}^2 = (\overline{\text{اج}} - \overline{\text{اب}})^2 + 4\,\overline{\text{بلا}} \times \overline{\text{جما}}$ ۔



88 اب ج کوئی مثلث ہے ۔ ا کے بیرونی ناصف پر $\overline{\text{جلا}}$ اور $\overline{\text{بما}}$ عمود کھینچے گئے ہیں ثابت کرو $\overline{\text{بج}}^2 =$
$(\overline{\text{اج}} + \overline{\text{اب}})^2 - 4\,\overline{\text{جلا}} \times \overline{\text{بما}}$ ۔

89 مسئلہ 50 کی شکل میں ثابت کرو کہ △ن س ب ف، د ج ک، ا ب ج مُساوی ہیں ۔



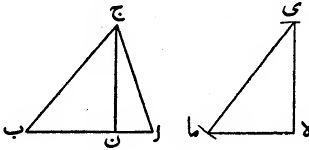
90 کسی چوکور میں وتروں پر کے مربعوں کا مجموعہ دُگنا ہوگا۔ اُن خطوط کے مربعوں سے جو چوکور کے متصلہ اضلاع کے وسطی نقاط کو باہم ملاتے ہیں ٭

91 (ا) اگر ا ب ج د مستطیل ہو اور ط کوئی نقطہ اِس کے اندر یا باہر ہو تو ثابت کرو:-

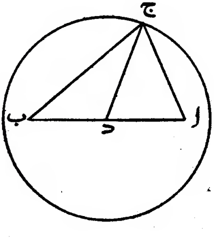
$$\overline{\text{طا}}^2 + \overline{\text{طج}}^2 = \overline{\text{طب}}^2 + \overline{\text{طد}}^2$$

(ب) اگر ا ب ج د ایسا ||ع ہو کہ کسی نقطہ ط سے $\overline{\text{اط}}^2 + \overline{\text{جط}}^2 = \overline{\text{بط}}^2 + \overline{\text{دط}}^2$ تو ||ع مستطیل ہوگا ٭

92 اگر مثلث کے ایک ضلع پر کا مربع دوسرے اضلاع پر کے مربعوں کے مجموعے سے بڑا ہو تو ضلع کا مقابلہ زاویہ منفرجہ ہوگا ٭

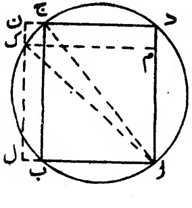


93 دیے ہوئے خط کو ایسے دو حصوں میں تقسیم کرو کہ حصوں پر کے مربعوں کا فرق دیے ہوئے مربع کے برابر ہو ٭



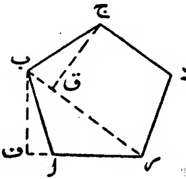
94 نقاط ا، ب، ج دیے ہوئے ہیں اگر $\overline{\text{اب}}$ اور $\overline{\text{اج}}$ کے مربعوں کا فرق کسی دیے ہوئے مربع کے برابر ہو تو ا کا طریق النقاط معلوم کرو ٭

95 ایک نقطے کے فاصلے دو دیے ہوئے نقاط سے ایسے ہیں کہ فاصلوں کے مربعوں کا مجموعہ مستقل ہے۔ نقطے کا طریق معلوم کرو ٭



96 ایک نقطے سے کسی دیے ہوئے مربّع کے اضلاع پر عمود ڈالے گئے ہیں۔ اگر ان عمودوں کے مربعوں کا مجموعہ دیے ہوئے مربّع سے دُگنا ہو تو اُس کا طریق انتقاط معلوم کرو۔

97 اب ج د س ایک منتظم مخمّس ہے۔ ثابت کرو کہ اُس کا رقبہ اُس ||ع کے برابر ہے جو خطوط متوازی ب س اور ج د کے درمیان ہے اور جس کا قاعدہ ج د اور نصف ب س کے مجموعے کے برابر ہے۔



98 اگر مثلث اب ج کا مرکزِ ثقل م ہو اور ط کوئی اور نقطہ ہو تو ثابت کرو کہ:-

$$\text{ط ا}^2 + \text{ط ب}^2 + \text{ط ج}^2 = \text{م ا}^2 + \text{م ب}^2 + \text{م ج}^2 + 3\,\text{م ط}^2$$

(مثلث کے وسطانیوں کا نقطۂ تقاطع اُن کا مرکزِ ثقل ہوتا ہے)

99 ایک نقطہ اس طرح حرکت کرتا ہے کہ تین دیے ہوئے نقاط سے اُس کے فاصلوں کے مربّعوں کا مجموعہ مستقل ہے۔ ثابت کرو کہ اُس کا طریق انتقاط دائرہ ہے۔ جس کا مرکز اُس مثلّث کا مرکزِ ثقل ہے جو نقاط کے ملانے سے بنتا ہے۔

100 ایک نقطہ اس طرح حرکت کرتا ہے کہ چار دیے ہوئے نقاط سے اُس کے فاصلوں کے مربّعوں کا مجموعہ مستقل ہے۔ نقطے کا طریق معلوم کرو۔

چوتھا حصّہ

دائرہ

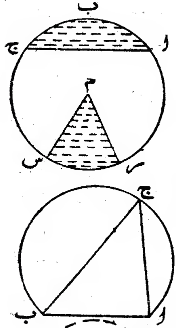
تعریفات:

1 دائرہ، مرکز، قُطر، نصف قُطر، مُحیط اور وَتر کی تعریفات پہلے دی جا چکی ہیں۔

2 نصف دائرہ۔ وُہ شکل ہے جو قُطر اور قُطر سے کٹے ہُوئے نصف مُحیط سے گھری ہُوئی ہو۔

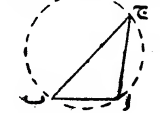
3 مُحیط کے کسی حصّے کو قَوس کہتے ہیں۔ قَوسِ خُورد وُہ قوس ہے جو نصف دائرے سے کم ہو۔ قوسِ کلاں وُہ قوس ہے جو نصف دائرے سے بڑی ہو۔

4 قَوس کے سِروں کو مِلانے والے خط کو قوس کا وَتر کہتے ہیں۔ جیسے ا ج۔



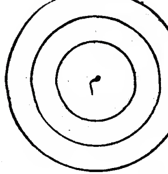
5 قطعہ دائرہ۔ وُہ شکل ہے جسے ایک خطِ مستقیم اور اُسی خط سے قطع کیے ہُوئے مُحیط نے گھیرا ہو (جیسے رقبہ ا ب ج

6 قطاعِ دائرہ۔ وہ شکل ہے جو قَوس اور اُس کے سِروں کے دو نصف قُطروں کے درمیان گھری ہو۔ جیسے رقبہ ر م س۔



7 اگر قطعہ دائرہ کی قوس پر کوئی نقطہ لے کر اُسے وَتر کے سِروں سے مِلایا جائے تو اِن خطُوط کے درمیانی زاویے کو زاویہ فی القطعہ کہتے ہیں۔ جیسے ا ج ب۔

8 اگر مُحیط پر کوئی نقطہ لے کر قَوس کے سِروں سے مِلایا جائے تو کہا جاتا ہے ایسا زاویہ قَوس پر قائم ہے۔



9 وُہ قطعے جن کے فی القطعہ زاویے آپس میں برابر ہوں مُتشابہ قطعے کہلاتے ہیں ٭

10 دائرے جن کا مرکز ایک ہی ہو ہم مرکز دائرے کہلاتے ہیں ٭

دائرے کے خواص

دائرے کی تعریف سے مُستنبط ہوتا ہے کہ

(۱) دائرے کے مرکز سے کسی نقطے کا فاصلہ نصف قُطر سے کم ہوگا۔ مُساوی ہوگا یا بڑا ہوگا۔ اگر وُہ نقطہ دائرے کے اندر، دائرے پر یا دائرے کے باہر ہو ٭

(۲) کسی قُطر کے دونوں جانب دائرہ متناسب ہوگا۔ یعنی اگر دائرے کو قُطر پر تہ کریں تو دونوں حصّے منطبق ہوں گے ٭

[اگر دونوں حصّے منطبق نہیں ہوتے تو مرکز سے کوئی خط کھینچو۔ یہ خط مرکز کو ف ، فَ پر کاٹیں گے۔ لیکن مُحیط پر کے ہر نقطے کا فاصلہ مرکز سے ایک ہی رہنا چاہیے۔ لہٰذا م ف = م فَ گویا جزُو برابر ہے کُل کے جو نا ممکن ہے]

نتیجہ: ہر قُطر دائرے کی تنصیف کرتا ہے ٭

(۳) دائرے کے ایک سے زیادہ مرکز نہیں ہو سکتے ٭

(۴) اگر دو دائروں کے نصف قطر مُساوی ہوں تو وُہ باہم منطبق ہوں گے ٭

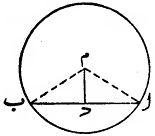
(۵) مُساوی نصف قطروں کے دائرے مُساوی ہوں گے ٭

(۶) تمام دائروں یا مُساوی دائروں کے قُطر مُساوی ہوں گے ٭

مسئلہ 61

(اثباتی)

اگر کوئی خطِ مستقیم مرکزِ دائرہ میں سے گزرتا ہُوا قطر کے علاوہ کسی اور وَتر کی تنصیف کرے تو وُہ وَتر پر عمُود ہوگا ؂

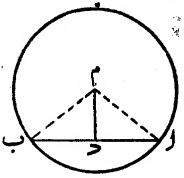


مفرُوض	فرض کرو دائرے کا مرکز م، وتر ا ب اور وَتر کا نقطۂ وسطی د ہے ؂
مطلوُب	م د عمُود ہوگا ا ب پر ؂
عمل	م ا اور م ب کو ملاؤ ؂
ثبوُت	△ن ا د م اور ب د م میں ا د = د ب (مفرُوض) د م = د م (مُشترک) ا م = ب م (نصف قطر) ∴ △ ا د م = △ ب د م پس ا د̂ م = ب د̂ م مگر یہ متصِلہ زاویے ہیں۔ اِس لیے اِن میں سے ہر ایک قائمہ ہے ؂ پس م د عمُود ہے وَتر ا ب پر ؂ (فھوَ المطلوُب)

مسئلہ 61 کا عکس

(اثباتی)

اگر مرکز دائرہ سے کسی وَتر پر عمُود کھینچا جائے تو وُہ وَتر کی تنصیف کرے گا ۔

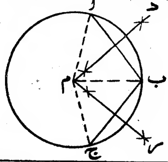


مفروض	فرض کرو دائرے کا مرکز م وَتر اب اور م سے اب پر عمُود م د ہے ۔
مطلوب	اد = دب ۔
عمل	م ا اور م ب کو ملاؤ ۔
ثبوت	قائم الزاویہ △ن ادم ، ب دم میں وَتر ام = وَتر بم مد = مد (مشترک) ∴ △ ادم ≡ △ ب دم پس اد = ب د (فہو المطلوب)

مسئلہ 62

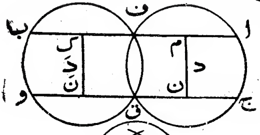
(اثباتی)

تین دیے ہُوئے نُقاط میں سے جو ایک خطِ مُستقیم میں نہ ہوں۔ ایک اور صرف ایک ہی دائرہ گزُر سکتا ہے ؛

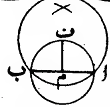


مفرُوض	فرض کرو ا، ب، ج تین نُقاط ہیں جو ایک خطِ مُستقیم میں نہیں ؛
مطلُوب	ا، ب، ج میں سے ایک اور صرف ایک ہی دائرہ گزرے گا ؛
عمل	اب، ب ج کو مِلاؤ اب، ب ج کے عمُودی ناصِف دم اور رم کھینچو جو نُقطہ م پر مِلیں ؛
ثبُوت	∵ دم خط اب کا عمُودی ناصِف ہے اِس لیے م ا = م ب پھر رم خط ب ج کا عمُودی ناصِف ہے اِس لیے م ب = م ج پس م ا = م ب = م ج ∴ اگر م کو مرکز مان کر م ا کی دُوری سے ایک دائرہ کھینچا جائے تو وُہ ب، ج میں گزُرے گا ؛ اب دم اور رم صرف ایک ہی نُقطہ م پر مِلتے ہیں۔ اِس لیے صرف ایک ہی نقطہ م مُساوی البُعد ہے ا، ب، ج سے پس ایک اور صرف ایک ہی ⊙ نقاط ا، ب، ج سے گزُرتا ہے (فھوَ المطلُوب)
نتیجۂ صریح	(1) اگر دو سے زیادہ نقاط ایک ہی خطِ مُستقیم میں ہوں تو اُن میں سے دائرہ نہیں گزُر سکتا ؛ (2) اگر دو دائروں میں تین نُقاط مُشترک ہوں تو دائرے مُنطبق ہوں گے ؛ (3) دو دائرے دو سے زیادہ نقطوں پر ایک دُوسرے کو قطع نہیں کرتے ؛

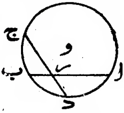
مشق 61



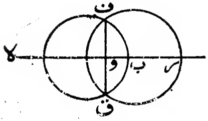
1 اگر متوازی خطوط دو دائروں کے نقاطِ تقاطع میں سے گزریں۔ تو اُن کے وہ حصّے جو دائروں کے اندر ہیں مساوی ہوں گے۔



2 دو نقاط میں سے گزرنے والے دائروں کے مراکز کا طریق النقاط معلوم کرو۔

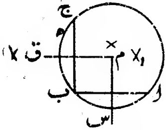


3 اگر دائرے کے وتر مرکز میں سے نہ گزرتے ہوں تو وہ ایک دوسرے کی تنصیف نہیں کریں گے۔



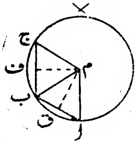
4 دائرے جو کسی قائم نقطے میں سے گزرتے ہیں اور جن کے مرکز کسی دیے ہوئے خط پر واقع ہیں وہ کسی دوسرے قائم نقطے میں سے ضرور گزریں گے۔

مشق 62



1 تین نقاط میں سے گزرنے والا دائرہ بناؤ۔

2 قوس معلوم ہے دائرہ مکمّل کرو۔



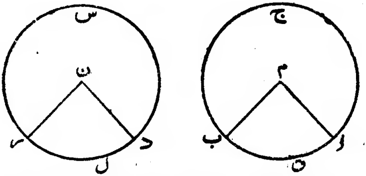
3 اگر دائرے کے اندر کسی نقطے سے محیط تک دو سے زیادہ مساوی خطوط کھینچے جا سکتے ہوں تو ثابت کرو کہ وہ نقطہ دائرے کا مرکز ہے۔

4 ثابت کرو کہ کسی مستطیل کے کونے ہم دائرہ ہیں۔

مسئلہ 63

(اثباتی)

مُساوی دائروں میں یا ایک ہی دائرے میں اگر دو مرکزی زاویے برابر ہوں تو جن قوسوں پر وہ قائم ہیں وہ بھی باہم برابر ہوں گے ؛



مفروض	فرض کرو اب ج ، د ر س مُساوی دائرے ہیں ۔ جن کے قوس اق ب دل ر مرکز م ، ن پر ا م ب ، د ن ر مُساوی زاویے بناتے ہیں ؛
مطلوب	قوس اق ب = قوس دل ر ؛
ثبوت	⊙ اب ج کو ⊙ د ر س پر رکھو اس طور پر کہ م ، ن پر آئے اور ا م ب ، د ن ر پر ۔ چونکہ نصف قطر برابر ہیں اس لیے ا ، د پر اور ب ، ر پر منطبق ہوں گے اب قوس اق ب اور دل ر پر کا ہر نقطہ اپنے اپنے مرکز سے مُساوی البُعد ہے اس لیے قوس اق ب منطبق ہوگی قوس دل ر پر پس قوس اق ب = قوس دل ر (فهو المطلوب)

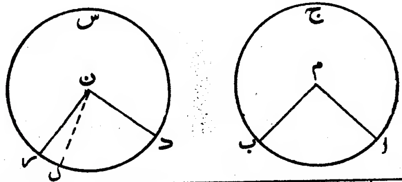
نوٹ : اگر ایک ہی دائرہ میں مذکورۂ بالا مسئلہ ثابت کرنا ہو تو پہلے دائرے کی صحیح نقل لے لو اور پھر وہی دلائل استعمال کرو جو اوپر دیے گئے ہیں ؛

نتیجہ صریح : مُساوی دائروں میں مُساوی قوسوں پر کے قطاع دائرے باہم برابر ہوں گے ؛

مسئلہ 63 کا عکس

(اثباتی)

مُساوی دائروں یا ایک ہی دائرے میں اگر دو قوسیں مُساوی ہوں گی تو اُن پر قائم ہونے والے مرکزی زاویے بھی مُساوی ہوں گے ۔



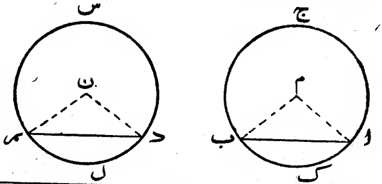
مفروض	فرض کرو اب ج اور د ر س مُساوی دائرے ہیں۔ جن کی قوسیں اب ، در برابر ہیں اور مرکز م ، ن ہیں ۔
مطلوب	ام̂ب = دن̂ر ۔
عمل	اگر ام̂ب اور دن̂ر مُساوی نہیں تو دن̂ل کو ام̂ب کے برابر کاٹو ۔
ثبوت	∵ ام̂ب = دن̂ل (بروئے عمل) ∴ قوس اب = قوس دل لیکن قوس اب = قوس در (بروئے مفروض) پس قوس دل = قوس در گویا جزو مُساوی ہے کُل کے جو ناممکن ہے ∴ دن̂ر زاویہ ام̂ب کے برابر ہے ، نابرابر نہیں پس ام̂ب = دن̂ر (فھو المطلوب)

نتیجہ صریح: اگر مرکز پر کے زاویے مُساوی ہوں تو قطاع دائرہ بھی مُساوی ہوں گے۔

مسئلہ 64

(اثباتی)

مُساوی دائروں یا ایک ہی دائرے میں اگر دو وَتر مُساوی ہوں تو وُہ مُساوی قوسیں قطع کریں گے ۔

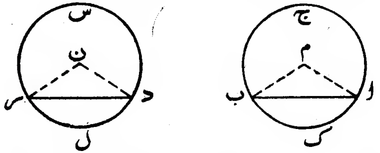


مفرُوض	فرض کرو اب ج اور د ر س دو مُساوی دائرے ہیں جن کے مرکز م، ن ہیں اور جن میں وَتر اب = وَتر د ر ۔
مطلوب	(۱) قوس ا ک ب = قوس د ل ر (۲) ″ ا ج ب = ″ د س ر
عمل	م ا ، م ب ، ن د ، ن ر کو مِلاؤ ۔
ثبوت	△ ا م ب ، د ن ر میں م ا = ن د } (مُساوی ○ کے نصف قطر) م ب = ن ر } ۔ ا ب = د ر (بروئے مفرُوض) پس مثلث منطبق ہیں اور ا م ب = د ن ر لہٰذا وُہ قوسیں جن پر یہ زاویے کھڑے ہیں باہم برابر ہوں گی ۔ پس قوس ا ک ب = قوس د ل ر ۔ نیز مُساوی دائروں کے مُحیط مُساوی ہیں اِس لیے باقی قوس ا ج ب بھی قوس د س ر کے برابر ہے ۔ (فھوَ المطلوب)

مسئلہ 64 کا عکس

(اثباتی)

مُساوی دائروں (یا ایک ہی دائرے میں) اگر دو قوسیں مُساوی ہوں تو اُن کے وتر بھی مُساوی ہوں گے ۔

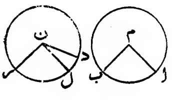


مفروض	فرض کرو دو مُساوی دائروں اب ج اور د ر س میں قوس اک ب = قوس د ل ر ۔
مطلوب	وتر اب = وتر د ر ۔
عمل	ا، ب کو مرکز م سے اور د، ر کو مرکز ن سے ملاؤ ۔
ثبوت	∵ قوس اک ب = قوس د ل ر (مفروض) پس زاویہ ا م ب = زاویہ د ن ر اب △ ا م ب اور △ د ن ر میں ∵ م ا = ن د (مُساوی نصف قطر) م ب = ن ر " ا م ب = د ن ر (بروئے ثبوت) لہٰذا △ ن منطبق ہیں پس وتر اب = وتر د ر (فہو المطلوب)

نتیجۂ صریح: مُساوی دائروں یا ایک ہی دائرے کے مُساوی وتر مُساوی قطعۂ دائرہ کاٹتے ہیں ۔

مشق 63

1 مُساوی دائروں یا ایک ہی دائرے میں اگر دو غیر مُساوی مرکزی زاویے لیے جائیں تو بڑا زاویہ بڑی قوس پر کھڑا ہو گا۔

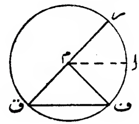


2 مرکزی زاویے کا اندرُونی ناصف اُس قوس کی تنصیف کرے گا جس پر وُہ کھڑا ہے۔

3 نصف قُطر جو مرکزی زاویے کو قوس کے وسطی نُقطے سے مِلاتا ہے۔ زاویے کی تنصیف کرے گا۔

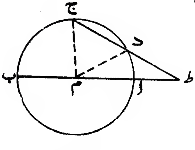
4 مُحیط پر کوئی نقطہ ف نصف قُطر م ا، م ب سے مُساوی البُعد ہے۔ ثابت کرو

قوس اف = قوس ب ف۔



5 دائرے کے مرکز سے نصف قطر م ا وتر ف ق کے متوازی کھینچا گیا ہے اگر ق م مُحیط کو ر پر کاٹے تو ثابت کرو۔

قوس اف = قوس ار۔



6 دائرے کے باہر کسی نقطہ ط سے دو خط ط ا ب اور ط د ج کھینچے گئے ہیں۔ جو دائرے کو قطع کرتے ہیں۔ اگر ط ا ب مرکز م میں سے گزرے اور ط د دائرے کے نصف قُطر کے برابر ہو تو ثابت کرو کہ

قوس ب ج = 3 قوس د ا۔

7 ایک دائرے کا مرکز م ہے۔ اُس کا ایک وتر ج د، قُطر ا ب کے مُتوازی ہے۔ ج ر ایک اور قطر ہے۔ ثابت کرو کہ

قوس ب د = قوس ب ر۔

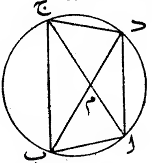
مشق 64

1 مُساوی دائروں میں مُساوی وَتر مُساوی قطعے کاٹتے ہیں ۔

2 اگر دائرے کی دو قوسیں برابر ہوں تو ان کے قطاع باہم برابر ہوں گے ۔

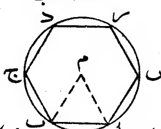
3 دائرے کا مرکز م قوس اب ج کے وسطی نقطہ ج سے ملایا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ م ج وتر اب کی تنصیف کرتا ہے ۔

4 دو مُساوی دائروں میں △ن اب ج ، ک ل م کھینچے گئے ہیں۔ اس طرح کہ ضلع اب = ک ل اور ب ج = ل م تو ثابت کرو۔ ج ا = م ک ۔



5 اگر کسی دائرے میں ایسا چوکور بنایا گیا ہو۔ جس کے دو متقابلہ اضلاع مُساوی ہیں تو ثابت کرو۔ اس کے وَتر بھی مُساوی ہوں گے ۔

6 کسی دائرے میں نصف قطر کے برابر چھ وَتر سروں سے سرے ملا کر رکھے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ وُہ منتظم مُسدّس شکل بناتے ہیں ۔



7 جو شکل سوال نمبر 6 میں بنائی گئی ہے اُس کا احاطہ اور رقبہ معلوم کرو ۔

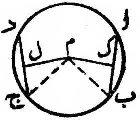
8 دائرے کے دو متوازی وَتروں کے انجاموں کو ملانے والے خط برابر ہوتے ہیں ۔

9 اگر دو مُساوی دائرے ایک دوسرے کو کاٹیں تو اُن کے وُہ حصّے جو وَتر مُشترک قطع کرتا ہے برابر ہوتے ہیں ۔

مسئلہ 65

(اثباتی)

دائرے کے مساوی وتر مرکز سے مساوی البعد ہوتے ہیں ۔



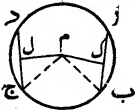
مفروض	فرض کرو اب اور ج د دو مساوی وتر ہیں اور م ک، م ل مرکز م سے اب، ج د پر عمود ہیں ۔
مطلوب	م ک = م ل ۔
عمل	م ب، م ج کو ملاؤ ۔
ثبوت	ک ب = $\frac{1}{2}$ اب (∵ م ک ⊥ اب پر) ل ج = $\frac{1}{2}$ ج د (∵ م ل ⊥ ج د پر) لیکن اب = ج د (مفروض) ∴ ک ب = ل ج اب قائم الزاویہ △ن ب ک م، ج ل م میں ک ب = ل ج (بروئے ثبوت) ب م = ج م (نصف قطر) لہٰذا مثلث منطبق ہیں ۔ اور م ک = م ل (فہو المطلوب)

نتیجۂ صریح: مساوی دائروں میں مساوی وتر مرکز سے مساوی البعد ہوں گے۔

مسئلہ 65 کا عکس

(اثباتی)

دائرے کے وتر جو مرکز سے مساوی البعد ہوں باہم مساوی ہوتے ہیں ۔



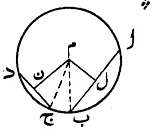
مفروض	فرض کرو اب ، ج د دو وتر ہیں ۔ جن پر مرکز م سے عمود م ک ، م ل گرائے گئے ہیں جو باہم مساوی ہیں ۔
مطلوب	اب = ج د ۔
عمل	م ب اور م ج کو ملاؤ ۔
ثبوت	قائم الزاویہ مثلثان م ک ب اور م ل ج میں وتر م ب = وتر م ج (نصف قطر) م ک = م ل (مفروض) ∴ مثلث منطبق ہیں اور ک ب = ل ج لیکن ک اور ل خطوط اب اور ج د کے نقاطِ وسطی ہیں کیونکہ م ک اور م ل اُن پر عمود ہیں اِس لیے اب = ج د (فہو المطلوب)

نتیجۂ صریح : مُساوی دائروں میں وتر جو مرکز سے مُساوی البُعد ہوں باہم برابر ہوں گے ۔

مسئلہ 66

(اثباتی)

دائرے کے دو وَتروں میں سے بڑا وَتر چھوٹے وَتر کی نسبت مرکز سے نزدیک تر ہوتا ہے۔

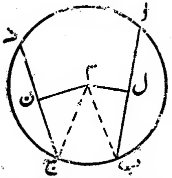


مفروض	فرض کرو اب اور ج د دائرے کے دو وَتر ہیں۔ جن میں سے اب > ج د سے م ل اور م ن مرکز م سے وَتروں پر عمود ہیں۔
مطلوب	فاصلہ م ل چھوٹا ہے م ن سے۔
عمل	م ب، م ج کو ملاؤ۔
ثبوت	ل ب = $\frac{1}{2}$ اب اور ن ج = $\frac{1}{2}$ ج د (کیونکہ م ل، م ن عمود ہیں) لیکن اب > ج د سے ∴ ل ب > ن ج سے اب قائم الزّاویہ مثلثان ب ل م، ج ن م میں م ب^2 = م ل^2 + ل ب^2 (فیثاغورث) اور م ج^2 = م ن^2 + ن ج^2 〃 لیکن م ب = م ج (دائرے کے نصف قطر) ∴ م ل^2 + ل ب^2 = م ن^2 + ن ج^2 مگر ل ب^2 بڑا ہے ن ج^2 سے ∴ م ل^2 چھوٹا ہے م ن^2 سے یعنی م ل 〃 〃 م ن سے (فھو المطلوب)

نتیجۂ صریح: دائرے کے اندر سب سے بڑا وَتر دائرے کا قطر ہوتا ہے۔

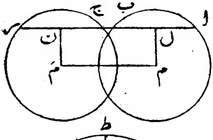
مسئلہ 66 کا عکس

دائرے کے دو وتروں میں سے جو وتر مرکز سے نزدیک تر ہو گا وہ دوسرے وتر سے بڑا ہو گا۔

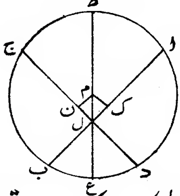


مفروض	فرض کرو اب، ج د دائرے کے دو وتر ہیں جن پر مرکز م سے عمود م ل، م ن گرائے گئے ہیں اور م ل چھوٹا ہے م ن سے۔
مطلوب	اب > ج د سے۔
عمل	م ب اور م ج کو ملاؤ۔
ثبوت	ل ب = $\frac{1}{2}$ [illegible] = $\frac{1}{2}$ ج د (کیونکہ م ل، م ن عمود ہیں) اب $\triangle$ ل ب م، ج م ن میں م ب^2 = م ل^2 + ل ب^2 (فیثاغورث) م ج^2 = م ن^2 + ن ج^2 مگر م ب = م ج (دائرے کے نصف قطر) $\therefore$ م ل^2 + ل ب^2 = م ن^2 + ن ج^2 مگر م ل چھوٹا ہے م ن سے۔ بڑا وتر مرکز سے نزدیک تر ہوتا ہے بہ نسبت چھوٹے وتر کے۔ پس م ل^2 چھوٹا ہے م ن^2 سے $\therefore$ ل ب^2 بڑا ہے ن ج^2 سے یا ل ب بڑا ہے ن ج سے یعنی اب بڑا ہے ج د سے (فہو المطلوب)

مشق 65



1 اگر مُساوی دائروں میں ایسے وَتر کھینچے جائیں جو ایک ہی خطِ مستقیم میں خطِ مرکزی کے متوازی واقع ہوں تو ثابت کرو کہ ایسے وَتر باہم برابر ہوں گے ۔

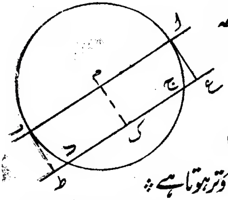


2 دو مُساوی وَتر اُس قطر کے ساتھ جو اُن کے نقطۂ تقاطع میں سے گزرتا ہے مُساوی زاویے بنائیں گے ۔

3 سوال نمبر 2 کا عکس بیان کرو اور اُس کا ثبوت دو ۔

4 دائرے میں مُساوی وَتروں کے نقاطِ وسطی ایک ہم مرکز دائرہ پر واقع ہوتے ہیں ۔

5 اگر کسی متحرک قطر کے سروں پر سے کسی وَتر پر عمود گرائے جائیں تو اُن عمودوں کا مجموعہ وَتر کے مرکزی عمود سے دُگنا ہوگا اور اُس کی مقدار مستقل رہے گی ۔



مشق 66

1 ثابت کرو کہ قطر دائرے کا سب سے بڑا وَتر ہوتا ہے ۔

2 دائرے کا نصف قطر 2.5 سم ہے اب اور ج د دو وَتر ہیں جن کا باہمی فاصلہ 3.9 سم ہے اگر اب 1.4 سم ہو تو د ج کی لمبائی بتاؤ ۔

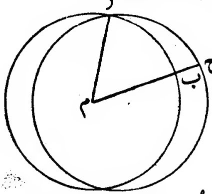
3 دائرے کے اندر کوئی نقطہ دیا ہوا ہے ۔ نقطے میں سے وہ وَتر کھینچو جو اقل ترین ہو ۔

4 دائرے کا وَتر > = یا < دوسرے وَتر سے اگر پہلے کا مرکزی زاویہ > = یا < ہے دوسرے وَتر کے مرکزی زاویے سے ۔

5 ایک خط اب دو مُساوی دائروں کو جن کے مرکز م اور مَ ہیں کاٹتے ہوئے م مَ کے وسطی نقطہ ن میں سے گزرتا ہے ثابت کرو کہ اب کے ٹکڑے جو دائروں کے اندر ہیں باہم مُساوی ہیں ۔

دائروں کی چند خصوصیات

دو متقاطع دائرے ہم مرکز نہیں ہوسکتے



اگر بفرضِ محال دو متقاطع دائروں کا مُشترکہ مرکز م ہو اور ا اُن کا ایک نقطۂ تقاطع ہو تو م ا کو ملاؤ اور م ب ج کوئی خط کھینچو جو اِن کے محیطوں کو ب، ج پر کاٹے۔

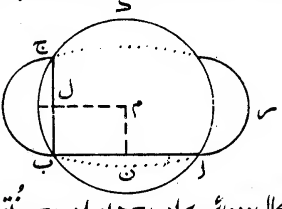
∵ م پہلے دائرے کا مرکز ہے ∴ م ا = م ب

∵ م دوسرے دائرے کا مرکز ہے ∴ م ا = م ج

پس م ب = م ج

گویا جزو کُل کے برابر ہے جو ناممکن ہے ۔

2 ایک دائرہ دوسرے دائرے کو دو سے زیادہ نقاط پر قطع نہیں کرسکتا۔



اگر بفرضِ محال دو دائرے ا ب ج د اور ا ب ج س نقاط ا، ب، ج پر ایک دوسرے کو کاٹیں تو ا ب اور ب ج کے عمودی ناصف کھینچو جو نقطہ م پر ملیں

اب ⊙ ا ب ج د کا مرکز م ہوگا۔

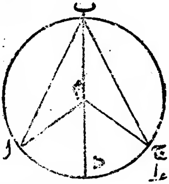
اسی طرح ⊙ ا ب ج س کا مرکز م ہوگا۔

لیکن دو متقاطع دائرے ہم مرکز نہیں ہوسکتے۔ لہٰذا ایک دائرہ دوسرے دائرے کو دو سے زیادہ نقاط پر قطع نہیں کرسکتا۔

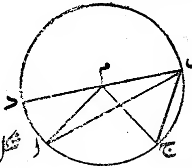
مسئلہ 67

(اثباتی)

اگر ایک مرکزی زاویہ اور ایک محیطی زاویہ ایک ہی قوس پر قائم ہوں تو مرکزی زاویہ محیطی زاویے سے دوچند ہوگا ۔

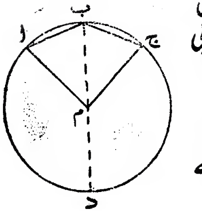


شکل 1



شکل 2

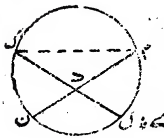
مفروض	فرض کرو ا ج کوئی قوس ہے م دائرے کا مرکز اور ب کوئی نقطہ محیط پر واقع ہے
مطلوب	ا م̂ ج = 2 ا ب̂ ج ۔
عمل	ب م کو ملاؤ اور اسے اتنا بڑھاؤ کہ محیط کو نقطہ د پر ملے ۔
ثبوت	خارجہ زاویہ ا م̂ د = ا ب̂ م + ب ا̂ م لیکن ا ب̂ م = ب ا̂ م (کیونکہ م ا = م ب) ∴ ا م̂ د = 2 ا ب̂ م (1) اسی طرح ج م̂ د = 2 ج ب̂ م (2) پہلی شکل میں (1) اور (2) کو جمع کرنے سے ا م̂ د + ج م̂ د = 2 (ا ب̂ م + ج ب̂ م) یعنی ا م̂ ج = 2 ا ب̂ ج دوسری شکل میں (1) کو (2) میں سے تفریق کرنے سے ج م̂ د − ا م̂ د = 2 (ج ب̂ م − ا ب̂ م) یعنی ا م̂ ج = 2 ا ب̂ ج (فہو المطلوب)



نوٹ: جب ا م ج زاویہ معکوس ہو۔ تو اس صورت میں بھی وہی ثبوت ہوگا جو پہلی شکل کے متعلق دیا گیا ہے ۔

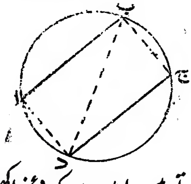
نتیجۂ صریح: مساوی دائروں یا (ایک ہی دائرے میں) اگر دو قوسیں برابر ہوں تو اُن کے محیطی زاویے برابر ہوں گے اور اس کے بالعکس ۔

مشق 67



1 مسئلہ نمبر 67 کو ثابت کرو جب ا م ج = 180°

2 ک ل اور م ن دائرے کے دو وتر ہیں جو نقطہ د پر قطع کرتے ہیں۔ ثابت کرو م د ل نصف ہے ک ن اور م ل کے مرکزی زاویوں کے مجموعے سے ۔



3 ا ب اور ج د دائرہ ا ب ج د کے دو مساوی وتر ہیں۔ ثابت کرو ا د || ب ج ۔

4 ا ب اور ج د دو متوازی وتر ہیں ثابت کرو قوس ب ج = قوس ا د اور قوس ا ج = قوس د ب ۔

5 دو مساوی دائرے نقاط ا، ب پر قطع کرتے ہیں۔ ا میں سے کوئی خط کھینچا گیا ہے۔ جو دائروں کو نقاط ف، ق پر کاٹتا ہے۔ ثابت کرو ف ب = ب ق ۔

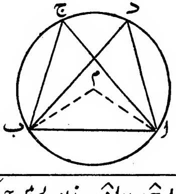
تعریفیں (۱) جو نقاط ایک ہی دائرے پر واقع ہوں۔ اُن کو ہم دائرہ یا متدائر نقاط کہتے ہیں ۔

(2) اگر کوئی ہندسی شکل دائرے کے اندر کھینچی جائے تو اُس کو شکل متدائر کہتے ہیں ۔

مسئلہ 68

(اثباتی)

زاویے جو ایک ہی قطعہ دائرے میں واقع ہوں باہم مُساوی ہوتے ہیں ۔

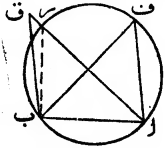


مفروض	فرض کرو اجب ، ادب زاویے ہیں جو ایک ہی قطعہ دائرہ میں واقع ہیں ۔
مطلوب	اجب = ادب ۔
عمل	م ا ، م ب کو ملاؤ ۔
ثبوت	چونکہ محیطی زاویہ مرکزی زاویے کا نصف ہوتا ہے اِس لیے اجب = $\frac{1}{2}$ امب ۔ اسی طرح ادب = $\frac{1}{2}$ امب ۔ پس اجب = ادب (فھوالمطلوب)

نتیجۂ صریح : کسی دائرے کی قوس ، مُحیط پر مُساوی زاویے بناتی ہے ۔

مسئلہ 68 کا عکس

اگر دو مُساوی زاویے ایک ہی قاعدے پر واقع ہوں تو زاویوں کے راس اور قاعدے کے سِرے ہم محیط ہوں گے ؛



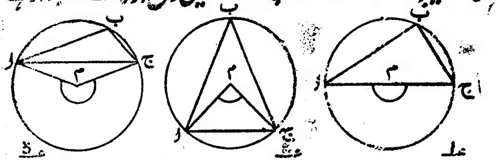
مفروض	فرض کرو اف ب اور اق ب دو مُساوی زاویے ایک ہی قاعدے اب پر واقع ہیں ؛
مطلوب	ا ، ف ، ق ، ب ہم دائرہ ہوں گے ؛
عمل	ا ، ف ، ب میں سے ایک دائرہ کھینچو اگر یہ ق میں سے نہیں گزرتا تو فرض کرو اق کو س پر کاٹتا ہے۔ س ب کو ملاؤ ؛
ثبوت	زاویہ اف ب ، اس ب ایک ہی قطع دائرہ میں واقع ہیں ؛ ∴ اف ب = اس ب مگر اف ب = اق ب (مفروض) ∴ اس ب = اق ب گویا △ ب س ق کا بیرونی زاویہ اندرونی مُتقابلہ زاویے کے مُساوی ہے جو محال ہے ؛ ∴ دائرہ نقطہ ق میں سے گزرتا ہے ؛ پس ا ، ف ، ق ، ب ہم محیط ہیں ؛ (فھوالمطلوب)

تعریف: ایسے نقاط جو ایک ہی دائرے کے محیط پر واقع ہوں وہ ہم محیط یا مُتدائر نُقطے کہلاتے ہیں ؛ مسئلۂ بالا میں نقاط ا ، ف ، ق ، ب مُتدائر نقاط ہیں۔ نیز ایک ایسی چوکور جس کے تمام راس ایک ہی دائرے کے محیط ہوں۔ مُتدائر چوکور کہلاتی ہے ؛

مسئلہ 69

(اثباتی)

1 زاویہ جو نصف دائرہ میں واقع ہو زاویہ قائمہ ہوتا ہے ؀
2 زاویہ جو نصف دائرے سے بڑے قطعے میں واقع ہو قائمے سے کم ہوتا ہے ؀
3 زاویہ جو نصف دائرے سے چھوٹے قطعے میں واقع ہو قائمے سے بڑا ہوتا ہے ؀



مفروض — فرض کرو دائرے ا ب ج کا مرکز م ہے۔ ا ج کوئی وتر ہے اور ا ب ج کوئی محیطی زاویہ ہے ؀

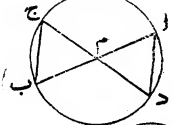
مطلوب —
(1) اگر ا ب ج نصف دائرہ ہے تو ا$\hat{ب}$ج زاویہ قائمہ ہے ؀
(2) اگر ا ب ج نصف دائرہ سے بڑا ہے تو ا$\hat{ب}$ج قائمے سے کم ہے ؀
(3) اگر ا ب ج نصف دائرہ سے کم ہے تو ا$\hat{ب}$ج قائمے سے بڑا ہے ؀

عمل — $\overline{\text{م ا}}$ ، $\overline{\text{م ج}}$ کو ملاؤ ؀

ثبوت — ∵ زاویہ مرکزی زاویہ محیطی سے دوچند ہوتا ہے
∴ ا$\hat{ب}$ج = ½ ا$\hat{م}$ج ؀
پہلی شکل میں ا$\hat{م}$ج زاویہ مستقیمہ ہے = دو قائمے
∴ ا$\hat{ب}$ج = زاویہ قائمہ ؀
دوسری شکل میں ا$\hat{م}$ج دو قائموں سے کم ہے
∴ ا$\hat{ب}$ج زاویہ قائمہ سے کم ہے ؀
تیسری شکل میں ا$\hat{م}$ج دو قائموں سے بڑا ہے
∴ ا$\hat{ب}$ج زاویہ قائمہ سے بڑا ہے ؀

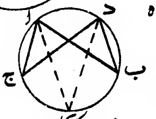
(فہو المطلوب)

مشق 68



1 ام ب اور ج م د کسی دائرے کے دو متقاطع وتر ہیں۔ ثابت کرو کہ △ ام د، ج م ب متساوی الزوایا ہیں۔

2 اگر چند زاویے ایک ہی قطعہ دائرہ میں واقع ہوں تو اُن کے ناصف ہم نقطہ ہوں گے۔

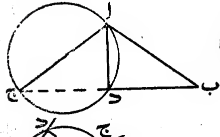


3 اب کسی دیے ہوئے دائرے کا وتر ہے اور ف کوئی نقطہ محیط پر واقع ہے۔ ثابت کرو کہ ∠ا ف ب کا ناصف دو خاص نقطوں میں سے ایک میں سے گزرے گا۔

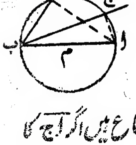
مشق 69

1 قائم الزاویہ △ کا وتر دائرۂ محیط کا قطر ہوگا۔

2 قائم الزاویہ مثلث اب ج کے وتر ب ج کا وسطی نقطہ م ہے۔ ثابت کرو کہ م ا = م ب = م ج۔



3 مثلث کے دو اضلاع مساوی ہیں۔ اگر اُن میں ایک ضلع کو قطر مان کر دائرہ کھینچا جائے تو یہ دائرہ قاعدے کے نقطۂ وسطی میں سے گزرے گا۔



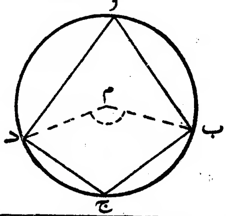
4 ایک متحرک خط ایک دیے ہوئے نقطے میں سے گزرتا ہے۔ اگر کسی دوسرے قائم نقطے سے اس پر عمود کھینچے جائیں تو پائے عمود کا طریق النقاط معلوم کرو۔

5 اب ج کوئی مثلث ہے جس میں ا ک اور ج ل دو ارتفاع ہیں اگر ا ج کا وسطی نقطہ م ہو تو ثابت کرو کہ
م ک = م ل۔

مسئلہ 70

(اثباتی)

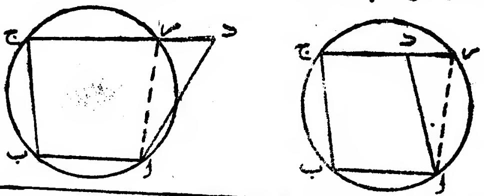
اگر کوئی چار ضلعی شکل دائرے کے اندر واقع ہو تو اُس کے دو مُتقابلہ زاویے مِل کر دو قائموں کے برابر ہوں گے ۔



مفروض	فرض کرو اب ج د چار ضلعی شکل ایک دائرے کے اندر واقع ہے جس کا مرکز م ہے ۔
مطلوب	(1) $\hat{\text{ا}} + \hat{\text{ج}} =$ دو قائمے (2) $\hat{\text{ب}} + \hat{\text{د}} =$ //
عمل	$\overline{\text{م ب}}$ ، $\overline{\text{م د}}$ کو مِلاؤ ۔
ثبوت	∵ زاویہ مرکزی زاویہ مُحیط سے دوچند ہے ۔ $\therefore \hat{\text{ا}} = \frac{1}{2}$ ب $\hat{\text{م}}$ د اسی طرح $\hat{\text{ج}} = \frac{1}{2}$ زاویہ معکوس ب $\hat{\text{م}}$ د پس $\hat{\text{ا}} + \hat{\text{ج}} = \frac{1}{2}$ (ب $\hat{\text{م}}$ د + معکوس ب $\hat{\text{م}}$ د) $= \frac{1}{2} \times 4$ قائمے $= 2$ قائمے ۔ اسی طرح ثابت کیا جا سکتا ہے کہ $\hat{\text{ب}} + \hat{\text{د}} = 2$ قائمے ۔ (ھوالمطلوب)

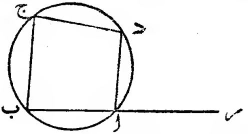
مسئلہ 70 کا عکس

اگر کسی چار ضلعی شکل میں دو مُتقابلہ زاویوں کا مجموعہ دو قائموں کے برابر ہو تو اس شکل کے چاروں راس ہم دائرہ ہوں گے ۔



مفروض	فرض کرو ا ب ج د چار ضلعی شکل ہے جس میں $\hat{\text{ب}} + \hat{\text{د}} = 180^\circ$ ۔
مطلوب	ا، ب، ج، د ہم دائرہ نقاط ہیں ۔
عمل	ا، ب، ج میں سے دائرہ کھینچو ۔ اگر یہ دائرہ د میں سے نہیں گزرتا تو فرض کرو یہ ج د کو یا ج د بڑھائے ہوئے کو س پر کاٹتا ہے ۔ س ا کو ملاؤ ۔
ثبوت	ا، ب، ج، س ہم دائرہ نقاط ہیں ۔ ∴ $\hat{\text{ب}} + \text{ج}\hat{\text{س}}\text{ا} = 180^\circ$ لیکن $\hat{\text{ب}} + \text{ج}\hat{\text{د}}\text{ا} = 180^\circ$ (مفروض) لہذا $\text{ج}\hat{\text{س}}\text{ا} = \text{ج}\hat{\text{د}}\text{ا}$ گویا △ ا س د کا ایک خارجہ زاویہ مُقابل کے داخلہ زاویے کے مُساوی ہے جو محال ہے ۔ اس لیے دائرہ ا ب ج نُقطہ د میں سے گزرتا ہے ۔ پس ا، ب، ج، د ہم دائرہ نقاط ہیں ۔ (فہو المطلوب)

نتیجۂ صریح: اگر چار ضلعی متدائر شکل کا ایک ضلع بڑھایا جائے تو خارجہ زاویہ متقابل کے داخلہ زاویے کے برابر ہوگا ؂



مفروض: فرض کرو چار ضلعی شکل اب ج د دائرے کے اندر واقع ہے اور ضلع ب ا کو س تک بڑھایا گیا ہے ؂

مطلوب: د ا̂ س = ب ج̂ د

ثبوت: د ا̂ س + د ا̂ ب = 180°

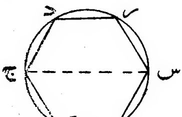
نیز د ج̂ ب + د ا̂ ب = 180° (متدائر چوکور کے متقابلہ زاویے)

∴ د ا̂ س + د ا̂ ب = د ج̂ ب + د ا̂ ب

پس د ا̂ س = د ج̂ ب

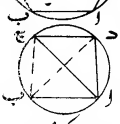
مشق 70

1 کسی متدائر مسدّس کے متبادلہ زاویوں کا مجموعہ چار قائموں کے برابر ہوگا ؂



2 ثابت کرو اگر کسی متوازی الاضلاع کے گرد دائرہ کھینچا جا سکتا ہے۔ تو وہ متوازی الاضلاع قائم الزّوایا ہوگا ؂

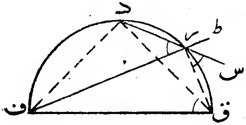
3 ایک چار ضلعی شکل اب ج د میں اب || ہے ج د کے مگر وہ دونوں برابر نہیں اور ب ج برابر ہے اد کے مگر وہ دونوں متوازی نہیں۔ ثابت کرو اب ج د متدائر شکل ہے ؂



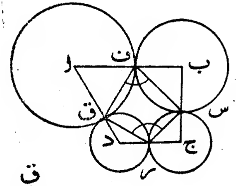
4 اگر ایک خط دو نقاط ا، ب کو ملاتا ہوا اپنی ایک ہی سمت کے دوسرے دو نقاط ج، د پر اگر مساوی زاویے بناتا ہو۔ تو ثابت کرو کہ اب ج د ایک متدائر چوکور ہے ؂

5 اگر چار ضلعی مُتدائر شکل کے دو مُتقابلہ ضلعے متوازی ہوں۔ تو ثابت کرو کہ باقی کے دو ضلعے مُساوی ہوں گے اور شکل کے وُتر باہم برابر ہوں گے۔

6 ف د ق کسی دائرے کی قوس ہے اور د اُس کا وسطی نقطہ ہے اگر ر کوئی اور نقطہ قوس پر ہو۔ تو ثابت کرو کہ در زاویہ ف ر ق کا بیرونی ناصف ہوگا۔

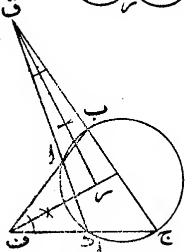


7 چار دائرے اس طرح پاس پاس رکھے ہیں کہ اُن میں سے ہر دائرہ ساتھ والے دو دائروں کو مس کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ چاروں تماس کے نقطے مُتدائر ہیں۔

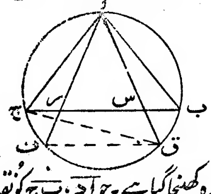


8 ثابت کرو کہ کسی مُتدائر چوکور کے ایک زاویے کا اندرونی ناصف مُتقابلہ زاویے کے بیرونی ناصف کو محیط پر قطع کرتا ہے۔

9 اگر کسی مُتدائر چوکور کے مُتقابلہ ضلعوں کو بڑھا کر مِلایا جائے تو اِس طرح بننے والے زاویوں کے ناصف علی القوائم ہوں گے۔



10 اب اور اج دائرے کے دو مُساوی وُتر ہیں۔ اف اور اق کوئی سے دو اور وُتر ہیں جو بج کو نقاط ر، س پر کاٹتے ہیں۔ ثابت کرو ف، ق، س، ر مُتدائر ہیں۔

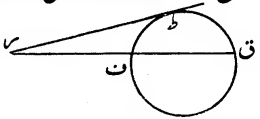


11 اب ج د ا|| ع ہے ا اور ب میں سے دائرہ کھینچا گیا ہے۔ جو اد، بج کو نقاط ر، ص پر قطع کرتا ہے۔ ثابت کرو ر، ص، ج، د مُتدائر نقاط ہیں۔

مماس

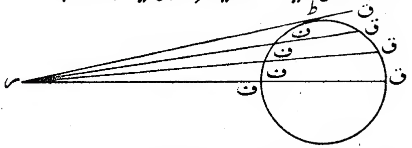
تعریفیں (۱) وُہ خطِ مُستقیم جو دائرے کے مُحیط کو دو نُقطوں میں قطع کرے دائرے کا خطِ قاطع کہلاتا ہے ؛

(۲) وُہ خطِ مُستقیم جو دائرے کو مس کرے اور خارج کیا جانے سے اُسے قطع نہ کرے دائرے کا مماس کہلاتا ہے ؛



اُوپر کی شکل میں س ف ق خطِ قاطع ہے اور س ط مماس ہے ؛

(۳) مماس کو ایک اور زاویۂ نظر سے بھی دیکھا جا سکتا ہے :-



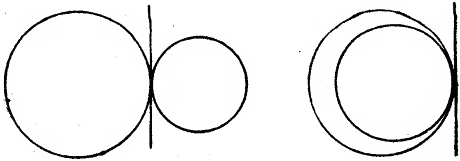
فرض کرو خطِ قاطع س ف ق س کے گرد چکر لگاتا ہے۔ اس طرح کہ ف اور ق ایک دُوسرے کے نزدیک تر آتے جاتے ہیں۔ آخری حالت میں ف اور ق دونوں ایک ہی نُقطہ ط پر مُنطبق ہو جاتے ہیں۔ خطِ قاطع اِس آخری حالت میں نُقطہ ط پر مماس ہو جاتا ہے ؛

لہٰذا مماس کی ایک تعریف یُوں بھی ہو سکتی ہے :-

اگر دائرے کا خطِ قاطع اس طرح حرکت کرے کہ دونوں نقاطِ تقاطع قریب تر ہو جائیں اور بالآخر باہم منطبق ہو جائیں تو خطِ قاطع اُس آخری مقام پر دائرے کو مس کرتا ہے اور اُس کو دائرے کا مماس کہتے ہیں ؛

(۴) وہ نقطہ جہاں قاطع کے دونوں نقطے منطبق ہو جاتے ہیں۔ نُقطۂ مماس کہلاتا ہے۔ ہر مماس دائرے کو نقطۂ مماس پر مس کرتا ہے ؛

(5) دو دائرے مماسہ: وُہ دائرے ہیں جو ایک دُوسرے کو مس کرتے ہیں۔ لیکن قطع نہیں کرتے ۔



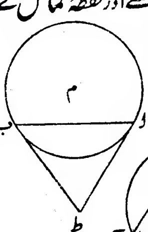
جب دو دائرے مماسہ ایک دُوسرے سے باہر ہوں تو وُہ بیرونی طَور پر مس کریں گے ۔ اگر ایک دائرہ دُوسرے کے بالکل اندر رہ کر اُس کو مس کرے تو کہا جاتا ہے کہ وُہ اندرونی طَور پر مس کرتا ہے ۔

(6) اگر کوئی خطِ مستقیم دو دائروں میں سے ہر ایک کو مس کرے تو اُسے دونوں دائروں کا مماس مشترک کہتے ہیں ۔

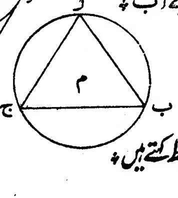
(7) اگر دائرے مماس مشترک کے ایک ہی طرف واقع ہوں تو مماس کو مُستقیم مماس مشترک کہیں گے ۔

(8) اگر دائرے مماس مشترک کے بالمقابل اطراف میں واقع ہوں تو مماس کو معکُوس مماس مشترک کہیں گے ۔

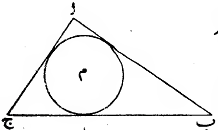
(9) تعریف: اگر کسی بیرونی نقطے سے دائرے تک مماس کھینچا جائے مماس کا طُول وُہ فاصلہ ہے جو اُس نقطے اور نقطۂ تماس کے مابین واقع ہے ۔



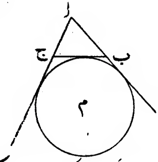
(10) اگر کسی بیرونی نقطے سے دائرے پر دو مماس کھینچے جائیں تو نقاطِ تماس کے ملانے والے خط کو وترِ مماس کہتے ہیں۔ جیسے $\overline{\text{اب}}$ ۔



(11) دائرہ جو مثلث کے تینوں راسوں سے گزرتا ہے ۔ دائرۂ محیط کہلاتا ہے ۔ اور اس کے مرکز کو مرکزِ محیط کہتے ہیں ۔

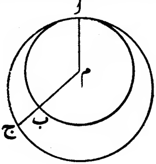


(12) **تعریف:** دائرہ جو مثلث کے اندر واقع ہو اور اُس کے تینوں ضلعوں کو مس کرے وُہ اندرُونی دائرہ کہلاتا ہے۔ اور اُس کے مرکز کو اندرُونی مرکز کہتے ہیں ۞



(13) دائرہ جو مثلث کے ایک ضلع کو اور باقی دو بڑھے ہُوئے ضلعوں کو مس کرے دائرہ خارجی کہلاتا ہے اور اُس کے مرکز کو مرکزِ خارجی کہتے ہیں ۞

(14) **مسئلہ۔** اگر دو دائرے ایک دُوسرے کو اندرُونی طَور پر مس کریں تو وُہ ہم مرکز نہیں ہو سکتے ۞



[اگر ایسا نہیں تو فرض کرو کہ اُن کا مُشترکہ مرکز م ہے۔
م کو نقطۂ تماس ا سے ملاؤ اور کوئی دُوسرا خط م ب ج کھینچو جو دائروں کو نقاط ب، ج پر ملے۔

تب م ا = م ب اور

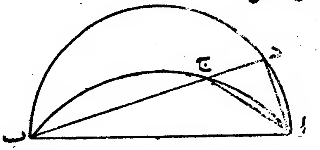
م ا = م ج

پس م ب = م ج

[گویا جزو برابر ہے کُل کے جو محال ہے]

(15) **تعریف: متشابہ قطعے:** دائرے کے وُہ قطعے ہیں جن کے زاویہ ہائے فی القطعہ باہم برابر ہوں ۞

(16) **مسئلہ:** ایک ہی وتر پر ایک ہی طرف ایسے دو متشابہ قطعے نہیں ہو سکتے جو باہم منطبق نہ ہوں۔



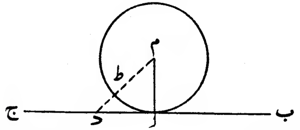
[اگر ممکن ہو تو فرض کرو ا ج ب اور ا د ب دو متشابہ قطعے بغیر منطبق ہوئے وتر ا ب کے ایک ہی طرف واقع ہیں]
ب ج کو ملاؤ اور اس کو بڑھاؤ تا آنکہ وہ دوسرے قطعے کو د پر ملے۔ ا ج اور ا د کو ملاؤ۔
چونکہ قطعے متشابہ ہیں۔ اس لیے ا ج ب = ا د ب
گویا بیرونی زاویہ اندرونی متقابلہ زاویے کے مساوی ہے جو محال ہے۔
لہٰذا ......

(17) **مسئلہ:** متشابہ قطعے جو مساوی وتروں پر واقع ہوں آپس میں بہر صورت برابر ہوں گے۔

[یہ مسئلہ ایک قطعے کو دوسرے قطعے کے اوپر رکھنے سے بآسانی ثابت ہو سکتا ہے]

مسئلہ 71

دائرے کے کسی نقطے پر کا مماس اور اُس میں سے گزرنے والا نصف قطر ایک دوسرے پر عمود ہوتے ہیں ؎



مفروض	فرض کرو دائرے کا مرکز م ہے اور ا اُس پر کوئی نقطہ ہے اور ب ا ج نقطہ ا پر مماس ہے ؎
مطلوب	م ا عمود ہے ب ا ج پر ؎
عمل	م ا کو ملاؤ۔ اگر م ا مماس ب ا ج پر عمود نہیں تو م سے ب ا ج پر خط م د عمود گراؤ جو دائرے کو ط پر قطع کرے ؎
ثبوت	اب بروئے عمل م د̂ ا قائمہ ہے۔ پس لازماً △ م ا د کا دوسرا زاویہ م ا̂ د قائمے سے کم ہے۔ یعنی م د̂ ا بڑا ہے م ا̂ د سے۔ لہٰذا متقابلہ ضلع م ا بڑا ہے م د سے مگر م ا = م ط کیونکہ دونوں نصف قطر ہیں پس م ط بڑا ہے م د سے یعنی [جزو بڑا ہے کُل سے جو ناممکن ہے] پس ثابت ہوا کہ م ط د عمود نہیں ہو سکتا۔ اِسی طرح کوئی اور خط سوا م ا کے عمود نہیں ہو سکتا۔ پس م ا عمود ہے ب ا ج پر ؎ (فہو المطلوب)

نتیجہ صریح: (1) اگر دائرے کے کسی نقطے میں سے گزرنے والے نصف قطر پر اُسی نقطے سے عمود کھینچا جائے تو وہ دائرے کا مماس ہوگا۔

(2) اس کے بالعکس اگر نقطۂ تماس میں سے مماس پر عمود کھینچا جائے تو مرکزِ دائرہ میں سے گزرے گا۔

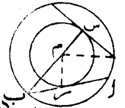
(3) کسی نقطۂ تماس پر صرف ایک ہی مماس کھینچا جا سکتا ہے۔

مشق 71

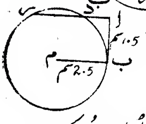
1 اب کسی دیے ہوئے دائرے کا قطر ہے۔ اگر ا اور ب پر مماس کھینچے جائیں تو وہ باہم متوازی ہوں گے۔

2 اگر کسی نقطے سے دائرے تک کے مماس ایک ہی طول کے ہوں تو اُس نقطے کا طریق النقاط معلوم کرو۔

3 دیے ہوئے خط کے متوازی کسی دائرے کا مماس کھینچنے کا طریق بیان کرو۔

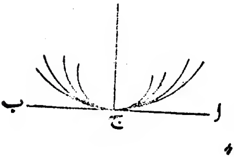


4 دو ہم مرکز دائروں میں بیرونی دائرے کے وتر اندرونی دائرے کے مماس ہیں ثابت کرو وتر مساوی ہیں۔



5 ایک دائرے کا نصف قطر 2.5 سم ہے۔ اب ایک مماس اُس کو نقطہ ب پر مس کرتا ہے۔ اب = 1.5 سم، اگر ا د س خط اب پر عموداً اس طرح کھینچا جائے کہ جو دائرے کو د، س پر ملے تو اد اور دس کا طول معلوم کرو۔

6 اُن تمام دائروں کے مرکز کا طریق النقاط معلوم کرو۔ جو کسی دیے ہوئے نقطے پر مس کرتے ہیں۔

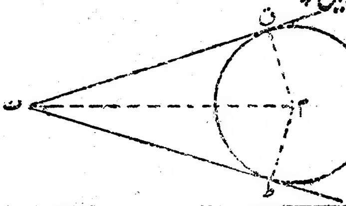


7 دائرے کے دو متوازی مماس کھینچے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ اُن کے نقطۂ تماس کا واصل دائرے کا قطر ہوگا۔

مسئلہ 72

(اثباتی)

کسی بیرونی نقطے سے دائرے تک کھینچے ہوئے دو مماس باہم مساوی ہوتے ہیں اور نقطے کو مرکز سے ملانے والے خط کے ساتھ مساوی زاویے بناتے ہیں ۔



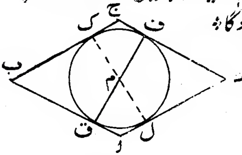
مفروض	فرض کیا کہ ف ق اور ف ط دو مماس ہیں جو بیرونی نقطہ ف سے دائرے پر کھینچے گئے ہیں ق اور ط نقاطِ مماس ہیں اور م دائرے کا مرکز ہے ۔
مطلوب	ف ق = ف ط اور ق ف م = ط ف م ۔
عمل	م ق ، م ط ، م ف کو ملاؤ ۔
ثبوت	قائم الزاویہ مثلث م ف ق ، م ف ط میں وتر م ف مشترک ہے اور م ق = م ط ∴ مثلث منطبق ہیں اور ف ق = ف ط ق ف م = ط ف م ۔ (فہو المطلوب)

نتیجۂ صریح (۱) خط ف م وتر مماس ع ط کا عمودی ناصف ہے ۔

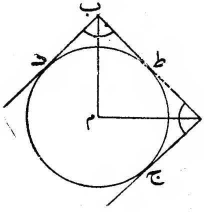
(۲) اگر بیرونی نقطے سے دائرے تک دو مماس کھینچے جائیں تو ان کے متقابلہ زاویے جو مرکز پر بنتے ہیں باہم مساوی ہیں ۔ نیز وہ وتر مماس کے ساتھ مساوی زاویے بناتے ہیں ۔

مشق 72

1 اگر ف سے کھینچے ہوئے دو مماس باہم زاویہ °60 بنائیں تو ثابت کرو کہ وتر مماس ان میں سے ہر مماس کے برابر ہوگا ۔



2 اگر دائرے کے گرد معیّن بنایا جائے تو متقابلہ نقاطِ مماس کو ملانے والا خط دائرے کے مرکز میں سے گزرے گا ۔



3 ا ب ج د کوئی چار ضلعی شکل ہے جو کسی دائرے کے گرد بنائی گئی ہے ۔ ثابت کرو کہ

اب + جد = بج + دا

4 دائرے کے دو نصف قطر جو علی القوائم ہیں بڑھائے جانے پر کسی مماس کو کاٹتے ہیں ۔ نقاطِ انقطاع سے دائرے پر مماس کھینچے گئے ہیں ۔ ثابت کرو کہ یہ مماس متوازی ہیں ۔

5 زاویے کے دونوں بازوؤں کو مس کرتے ہوئے دائرے کھینچے گئے ہیں ۔ ان کے مرکز کا طریق النقاط معلوم کرو ۔

6 دو متقاطع خطوط دیے ہوئے ہیں ۔ معلوم نصف قطر کا ایسا دائرہ کھینچو ۔ جس کا مرکز ان میں سے ایک خط پر واقع ہو ۔ اور وہ دائرہ دوسرے خط سے مس کرے ۔

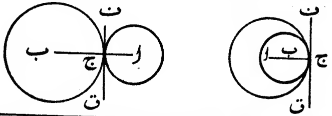
7 اگر متوازی الاضلاع کے سب ضلعے دائرے کو مس کریں تو وہ معیّن ہوگا ۔

8 اگر مستطیل کے سب ضلعے دائرے کو مس کریں تو وہ مربع ہوگا ۔

مسئلہ 73

(اثباتی)

اگر دو دائرے ایک دُوسرے کو مس کریں تو نُقطۂ تماس اُس خط پر واقع ہوگا جو دونوں کے مرکزوں کو مِلاتا ہے ٭

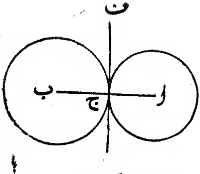


مفرُوض	فرض کرو دو دائرے ایک دُوسرے کو نقطہ ج پر مس کرتے ہیں اور ان کے مرکز ا اور ب ہیں ٭
مطلُوب	نُقطہ ج خط اب پر واقع ہوگا ٭
عمل	ف ج ق دونوں کا مُشترکہ مماس کھینچو جس کا نقطۂ تماس ج ہے ۔ ا ج ، ب ج کو مِلاؤ ٭
ثبُوت	ا ج نصف قُطر اور ف ق مماس ہے ٭ ∴ ا ج ف زاویہ قائمہ ہے ٭ اِسی طرح ب ج ف قائمہ ہے ٭ لہٰذا ج ا اور ج ب یا مُنطبق ہیں یا ایک ہی خطِ مُستقیم میں ہیں ٭ پس نقطہ ج خط اب پر واقع ہے ٭ (فہو المطلُوب)

نتیجۂ صریح (۱) بیرُونی مس کی صُورت میں دو دائروں کا مرکزی فاصلہ اُن کے نصف قطروں کے مجمُوعے کے برابر ہے ٭

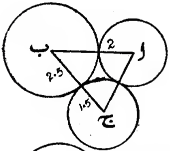
(2) اندرُونی مس کی صُورت میں دو دائروں کا مرکزی فاصلہ اُن کے نصف قطروں کے فرق کے برابر ہے ٭

مشق 73

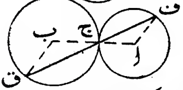


1 (ا) اگر دو دائروں کا مرکزی فاصلہ اُن کے نصف قطروں کے مجموعے کے برابر ہے تو وہ آپس میں بیرونی طور پر مس کریں گے۔
(ب) تین دائرے کھینچو جو آپس میں بیرونی طور پر مس کریں اور جن کے نصف قطر ۱ سم، 1.5 سم اور 2 سم ہوں۔

2 اگر دو دائرے خطِ مرکزی کے کسی نقطے پر باہم ملیں تو اُس نقطے پر وہ ایک دُوسرے کو مس کریں گے۔



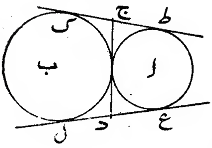
3 دو دائرے جن کے نصف قطر 2 سم اور 2.5 سم ہیں۔ ایک دُوسرے کو بیرونی طور پر مس کرتے ہیں۔ ایک اور دائرہ 1.5 سم نصف قطر کا کھینچو۔ جو پہلے دو دائروں کو بیرونی طور پر مس کرے۔



4 دو دائروں کے مرکز نقاط ا، ب پر ہیں اگر وہ ایک دُوسرے کو نقطہ ج پر مس کریں اور ج میں سے کوئی خط $\overline{\text{ف ج ق}}$ کھینچا جائے جو دائروں کو ف، ق پر ملے تو ثابت کرو کہ $\overline{\text{اف}} \parallel \overline{\text{ب ق}}$۔

5 سوال نمبر ۴ کی شکل میں ثابت کرو کہ ف اور ق پر کے مماس باہم متوازی ہیں۔

6 دو مساوی دائرے ایک دُوسرے کو بیرونی طور پر مس کرتے ہیں۔ اُس دائرے کے مرکز کا طریق معلوم کرو۔ جو ان دونوں کو مس کرے۔



7 دو دائرے ایک دُوسرے کو بیرونی طور پر مس کرتے ہیں۔ اُن کے تین مشترک مماسوں میں سے ایک مماس دُوسرے دو کی تنصیف کرے گا۔

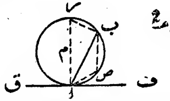
8 دو دائرے بیرونی طور پر نقطہ ا پر مس کرتے ہیں۔ $\overline{\text{ب ج}}$ ان کا مماس مشترک ہے۔ ثابت کرو ب $\hat{\text{ا}}$ ج $= 90^\circ$۔

مسئلہ 74

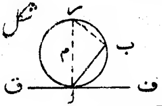
(نظری)

اگر کوئی خطِ مستقیم دائرے کو مس کرے اور نقطۂ تماس میں سے ایک وتر کھینچا جائے تو ثابت کرو کہ وتر اور مماس کے درمیانی زاویے متبادلہ قطعات کے زاویوں کے برابر ہوں گے ؂

شکل 2



شکل 1



مفروض | فرض کرو اب دائرے کا وتر اور ف ا ق خطِ مماس ہے ؂

مطلوب | (1) ف اَب = زاویہ فی القطعہ ا رَ ب
(2) ق اَب = ″ ″ ا صَ ب

عمل | ا ر کو مماس پر عموداً کھینچو۔ ر ب، ص ا، ص ب کو ملاؤ ؂

ثبوت | (1) ∵ ا ر عمود ہے مماس پر ∴ یہ مرکز میں سے گزرتا ہے اور دائرے کا قطر ہے
پس اَب ر = 90°
پس △ اب ر کے زاویے ا رَ ب + ب اَ ر = 90°
مگر بروئے عمل ف اَب + ب اَ ر = 90°
پس ف اَب + ب اَ ر = ا رَ ب + ب اَ ر
یعنی ف اَب = ا رَ ب
مگر قطعہ ا ر ب میں تمام زاویے فی القطعہ باہم مساوی ہیں
پس ف اب = زاویہ فی القطعہ ا رَ ب
(2) شکل نمبر 2 میں ا ر ب ص متدائر شکل ہے ∴ رَ + صَ = 2 قائمے
نیز ف اَب + ق اَب = 2 قائمے
پس ف اَب + ق اَب = رَ + صَ مگر ف اب = رَ
پس ق اَب = صَ = زاویۂ فی القطعہ ا صَ ب (فھو المطلوب)

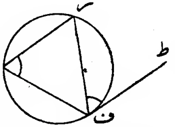
مشق 74

1 مسئلہ نمبر 74 کا عکس بیان کرو اور ثبوت دو ۔

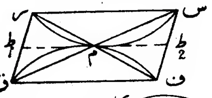
2 مسئلہ نمبر 71 کو مسئلہ نمبر 74 سے مستنبط کرو ۔

3 △ اب ج دائرے کے اندر کھینچا گیا ہے ۔ ب د مماس ہے اور ج د خط اب کے || ہے ۔ ثابت کرو کہ △ن اب ج ، ب ج د متساوی الزاوایا ہیں ۔

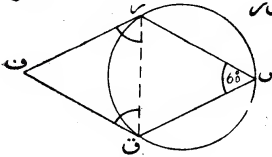
4 محیط کے کسی نقطے سے دائرے کا مرکز معلوم کیے بغیر مماس کھینچو ۔



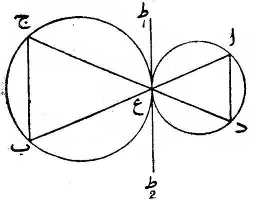
5 ف ق ر س || ع ہے ۔ جس کے وتر م پر ملتے ہیں ۔ ثابت کرو کہ دو دائرے ف م ق ، س م ر ایک دوسرے کو مس کرتے ہیں ۔



6 ف ق ، ف ر کسی دائرے کے دو مماس ہیں || ع ف ق ص ر کو مکمل کیا گیا ہے ۔ اگر ص دائرے کے محیط پر واقع ہو تو || ع کے زاویے معلوم کرو ۔



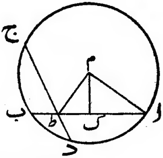
7 دو دائرے ایک دوسرے کو بیرونی طور پر نقطہ ع پر مس کرتے ہیں ۔ دو خط اع ب اور ج ع د نقطہ ع میں سے گزرتے ہوئے دائروں کو ا ، ب اور ج ، د پر کاٹتے ہیں ۔ ثابت کرو اد || ب ج ۔



مسئلہ 75

(اثباتی)

اگر دائرے کے دو وتر ایک دُوسرے کو دائرے کے اندر قطع کریں تو ایک وتر کے دونوں حصّوں کی سطح دُوسرے وتر کے دونوں حصّوں کی سطح کے برابر ہوگی ۔

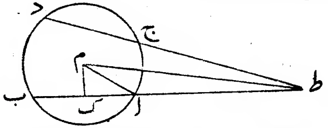


مفروض	فرض کرو $\overline{\text{اب}}$ اور $\overline{\text{جد}}$ دائرے کے دُو منقاطع وتر ہیں جو ایک دُوسرے کو نقطہ ط پر کاٹتے ہیں ۔ م دائرے کا مرکز اور ر نصف قطر ہے ۔
مطلوب	$\overline{\text{اط}} \times \overline{\text{طب}} = \overline{\text{جط}} \times \overline{\text{طد}}$ ۔
عمل	م سے $\overline{\text{اب}}$ پر عمود $\overline{\text{مک}}$ کھینچو (جو $\overline{\text{اب}}$ کی تنصیف کرے گا) $\overline{\text{مط}}$ کو ملاؤ ۔
ثبوت	$\overline{\text{اط}} \times \overline{\text{طب}} = (\overline{\text{اک}} + \overline{\text{کط}})(\overline{\text{کب}} - \overline{\text{کط}})$ $= (\overline{\text{اک}} + \overline{\text{کط}})(\overline{\text{اک}} - \overline{\text{کط}})$ $[\because \overline{\text{اک}} = \overline{\text{کب}}]$ $= \overline{\text{اک}}^2 - \overline{\text{کط}}^2$ $= (\overline{\text{ام}}^2 - \overline{\text{مک}}^2) - (\overline{\text{مط}}^2 - \overline{\text{مک}}^2)$ فیثاغورث $= \overline{\text{ام}}^2 - \overline{\text{مط}}^2 = \text{ر}^2 - \overline{\text{مط}}^2$ اسی طرح ثابت کیا جاسکتا ہے کہ $\overline{\text{جط}} \times \overline{\text{طد}} = \text{ر}^2 - \overline{\text{مط}}^2$ پس $\overline{\text{اط}} \times \overline{\text{طب}} = \overline{\text{جط}} \times \overline{\text{طد}}$ (فہو المطلوب)

مسئلہ 76

(اثباتی)

اگر دائرے کے دو وتر ایک دوسرے کو دائرے کے باہر قطع کریں تو ایک وتر کے دونوں حصّوں کا مستطیل دوسرے وتر کے دونوں حصّوں کے مستطیل کے برابر ہوگا ۔



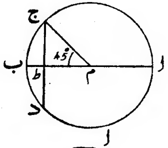
مفروض	فرض کرو اب اور ج د دائرے کے دو وتر ایک دوسرے کو بیرونِ دائرہ نقطہ ط پر قطع کرتے ہیں م دائرے کا مرکز اور ر نصف قطر ہے ۔
مطلوب	$\overline{\text{طا}} \times \overline{\text{طب}} = \overline{\text{طج}} \times \overline{\text{طد}}$
عمل	م سے اب پر عمود م ک کھینچو (جو اب کی تنصیف کرے گا) م ا کو ملاؤ ۔
ثبوت	$\overline{\text{طا}} \times \overline{\text{طب}} = (\overline{\text{طک}} - \overline{\text{اک}})(\overline{\text{طک}} + \overline{\text{کب}})$ $= (\overline{\text{طک}} - \overline{\text{اک}})(\overline{\text{طک}} + \overline{\text{اک}}) \because [\overline{\text{اک}} = \overline{\text{کب}}]$ $= \overline{\text{طک}}^2 - \overline{\text{اک}}^2$ $= (\overline{\text{طم}}^2 - \overline{\text{مک}}^2) - (\overline{\text{ام}}^2 - \overline{\text{مک}}^2)$ فیثاغورث $= \overline{\text{طم}}^2 - \overline{\text{ام}}^2$ $= \overline{\text{طم}}^2 - \text{ر}^2$ اسی طرح ثابت کیا جا سکتا ہے کہ $\overline{\text{طج}} \times \overline{\text{طد}} = \overline{\text{طم}}^2 - \text{ر}^2$ پس $\overline{\text{طا}} \times \overline{\text{طب}} = \overline{\text{طج}} \times \overline{\text{طد}}$ (فہو المطلوب)

مشق 75، 76

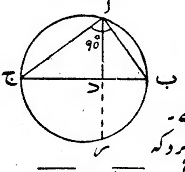
1 ط سے دو خط اطب ، ج ط د کھینچو۔ اس طرح اط = 4 سم، طب = 3 سم اور ج ط = 6 سم، دائرہ اب ج کھینچو جو ج ط کو بڑھانے سے د پر کاٹے۔ طد کا طول معلوم کرو اور پیمائش سے اس کی پڑتال کرو۔

2 اگر دائرے کا نصف قطر 2.5 انچ ہو اور دائرے کے کسی اندرونی نقطہ ف کا فاصلہ مرکز سے 1.5 ہو تو اس کے وتر کا طول معلوم کرو۔ جو ف میں سے گزرتا ہے۔ اور جس کا ایک ٹکڑا دوسرے ٹکڑے سے دُگنا ہے۔

3 ایک برقی تار کا پھیلاؤ 100 فٹ ہے اور وسط میں اس کا انخفاض (جھکاؤ) 6 ہے۔ اگر اس کی شکل قوس دائرہ کی ہو تو اس کا نصف قطر معلوم کرو۔



4 دائرے کے قطر اب پر کوئی ایسا نقطہ ط معلوم کرو کہ مستطیل اط × اب کا رقبہ نصف قطر کے مربع سے نصف ہو۔

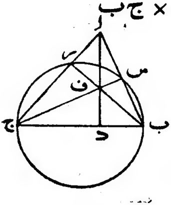


5 مثلث اب ج کا زاویہ اؔ قائمہ ہے۔ اگر اد اس کا ارتفاع ہو تو ثابت کرو۔

اد^2 = ب د × د ج

6 △ اب ج کا زاویہ اؔ قائمہ ہے۔ اد عمود ہے ب ج پر۔ ثابت کرو کہ

اب^2 = ب د × ب ج اور اج^2 = ج د × ج ب

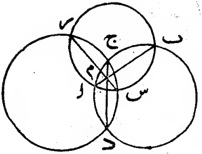


7 △ اب ج کے ارتفاع اد، ب ر، ج س نقطہ ف پر ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ

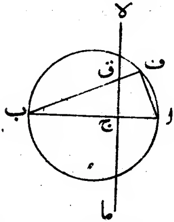
(1) اب × اس = اج × ار

(2) ب س × ب ا = ب ف × ب ر

(3) ج ر × ج ا = ج ف × ج س



8 ثابت کرو کہ تین مُتقاطع دائروں کے وتر دو دو کر کے ہم نقطہ ہوں گے ۔



9 لاما کوئی قائم خط ہے جو دائرے کے قطر اب پر عمود ہے۔ ب سے کوئی خط دائرے کو ف پر اور لاما کو ق پر قطع کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ مُستطیل ب ف × ب ق کا رقبہ ہر صورت میں مُستقل ہے ۔

10 اگر دائرے کے نقطہ ا سے اب اور اج دو وتر کھینچے جائیں اور اُن کو د، س تک اِس طرح بڑھایا جائے کہ اج × اس = اب × اد اور اگر دائرے کا مرکز م ہو۔ تو ثابت کرو کہ ام عمود ہوگا دس پر ۔

11 اب ج ایک قائم الزّاویہ تکون ہے۔ جس میں ب قائمہ زاویہ ہے۔ ب ج کے کسی نقطہ د سے دی عمود اج پر گرایا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ

اج × ج ی = ب ج × ج د

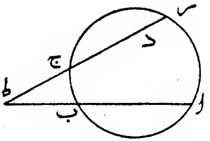
[اشارہ: چوکور اب د ی مُتدائر ہے]

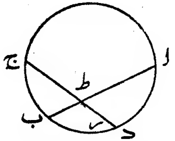
12 اب ایک ایسے دائرے کا وتر ہے۔ جس کا نصف قطر 4.3 سم ہے۔ اِس وتر پر ایک نقطہ ط ہے۔ جس پر اب کے دو حصّے 7 : 10 کی نسبت میں ہو جاتے ہیں۔ اگر نقطہ ط مرکز م سے 2.7 سم پر ہو تو اب کی لمبائی معلوم کرو ۔

مسئلہ 77

(اثباتی)

اگر دو خط ا ب ، ج د ایک دوسرے کو اندرونی یا بیرونی طور پر کاٹیں اس طور پر کہ ط ا × ط ب = ط ج × ط د تو چاروں نقاط ا ، ب ، ج ، د متدائر ہوں گے ؎



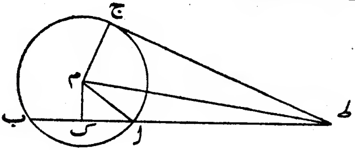


مفروض	فرض کرو خطوط ا ب اور ج د ایک دوسرے کو نقطہ ط پر کاٹتے ہیں ۔ اس طور پر کہ ا ط × ط ب = ج ط × ط د ؎
مطلوب	ا ، ب ، ج ، د متدائر ہیں ؎
عمل	اگر دائرہ نقاط ا ، ب ، ج میں سے گزرتا ہؤا نقطہ د میں سے نہیں گزرتا تو فرض کرو وُہ ج د کو (یا ج د بڑھائے ہوئے کو) نقطہ س پر قطع کرتا ہے ؎
ثبوت	∵ ا ، ب ، ج ، س متدائر ہیں (بروئے عمل) ∴ ا ط × ط ب = ج ط × ط س لیکن ا ط × ط ب = ج ط × ط د (مفروض) لہٰذا ج ط × ط س = ج ط × ط د یا ط س = ط د پس نقطہ س نقطہ د پر منطبق ہے ؎ یعنی ا ، ب ، ج ، د متدائر ہیں ؎ (فہو المطلوب)

مسئلہ 78

(اثباتی)

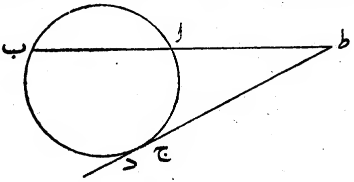
اگر کسی بیرونی نقطے سے دائرے تک ایک خطِ قاطع اور ایک خطِ مماس کھینچے جائیں تو سارے خطِ قاطع اور اُس کے بیرونی حصے کی سطح مماس کے مربع کے برابر ہوگی ۔



مفروض	فرض کرو ط ا ب خطِ قاطع اور ط ج خطِ مماس ہے اور م دائرے کا مرکز ہے ۔
مطلوب	ط ا × ط ب = ط ج^2
عمل	م ک خط ط ا ب پر عمود گراؤ (جو ا ب کی تنصیف کرے گا)
ثبوت	ط ا × ط ب = (ط ک − ا ک) (ط ک + ک ب) = (ط ک − ا ک) (ط ک + ا ک) [∵ ک ب = ک ا] = ط ک^2 − ا ک^2 = (ط م^2 − م ک^2) − (ا م^2 − م ک^2) = ط م^2 − ا م^2 = ط م^2 − ج م^2 ∵ (ا م = ج م) = ط ج^2 [فیثاغورث] (فہو المطلوب)

مسئلہ 78 کا عکس

اگر کسی بیرونی نقطے سے دائرے پر خطِ قاطع کھینچا جائے اور اسی نقطے سے دائرے تک ایک ایسا خط کھینچا جائے جس کا مربع خطِ قاطع اور اس کے بیرونی حصے کی سطح کے برابر ہو تو وہ خط دائرے کا مماس ہوگا



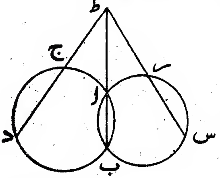
مفروض	فرض کرو ط ا ب ایک خطِ قاطع دائرے کو ا . ب پر کاٹتا ہے ط ج کوئی اور خط دائرے تک کھینچا گیا ہے ۔ اس طور پر کہ ط ا × ب ط = ط ج²
مطلوب	ط ج دائرے کا مماس ہوگا ؛
ثبوت	اگر ایسا نہیں تو بفرضِ محال ط ج بڑھانے سے دائرے کو پھر نقطہ د پر ملتا ہے ؛ ∵ ط ا ب اور ط ج د خطِ قاطع ہیں ؛ ∴ ط ا × ط ب = ط ج × ط د مگر ط ا × ط ب = ط ج² (مفروض) ∴ ط ج × ط د = ط ج² یعنی ط د = ط ج پس ج اور د منطبق ہیں ؛ ∴ ج ط دائرے کا مماس ہے ؛

(فہو المطلوب)

مشق 77، 78

1 △ اب ج کا زاویہ آ قائمہ ہے۔ اد خط ب ج پر عمود ہے۔ ثابت کرو کہ

اب^2 = ب د × ب ج، ا ج^2 = ج د × ج ب ؁

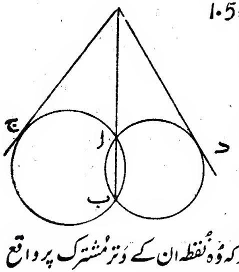


2 دو دائرے ایک دوسرے کو نقاط ا، ب پر قطع کرتے ہیں۔ اب کو بڑھا کر اس پر نقطہ ط لیا گیا ہے۔ ط سے خطوط ط ج د، ط ر س کھینچے گئے ہیں۔ جو دائروں کو ج، د، ر، س پر ملتے ہیں۔
ثابت کرو کہ یہ نقاط متدائر ہیں ؁

3 اب ج، اد ر دو خط ہیں جو نقطہ ا سے کھینچے گئے ہیں۔ اگر اب = 4 سم ب ج = 2 سم، اد = 3 سم، د ر = 5 سم تو ثابت کرو کہ ب، ج، د، ر متدائر نقاط ہیں ؁

4 مسئلہ نمبر 78 میں سے مسئلہ نمبر 72 مستنبط کرو۔ یعنی ثابت کرو کہ دائرے کے کسی بیرونی نقطے سے کھینچے ہوئے دو مماس مساوی ہوں گے ؁

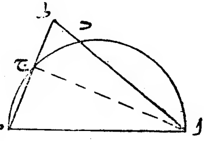
5 مسئلہ 78 کی شکل میں مستطیل ط ا × ط ب کا رقبہ معلوم کرو جب
(i) ط م = 6 سم اور نصف قطر = 4 سم
(ii) ط م = 3 ″ اور ″ = 1.5



6 دو متقاطع دائروں کے وتر مشترک کے کسی نقطے سے دو مماس کھینچے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ وہ باہم مساوی ہیں اور اس طرح اس نقطے کا طریق معلوم کرو۔ جس سے دو متقاطع دائروں پر مساوی مماس کھینچے جا سکتے ہیں ؁

7 اگر کسی نقطے سے دو متقاطع دائروں تک کے مماس مساوی ہوں تو ثابت کر کہ وہ نقطہ ان کے وتر مشترک پر واقع ہو گا ؁

8 خط اب پر نصف دائرہ بنایا گیا ہے۔ اد اور ب ج دو وتر ہیں۔ جو نقط



ط پر ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ
$\overline{\text{اب}}^2 = \overline{\text{اد}} \times \overline{\text{اط}} + \overline{\text{بج}} \times \overline{\text{بط}}$ ۔

9 $\overline{\text{ابج}}$، $\overline{\text{ادس}}$ دو متقاطع خط نقطہ ا پر ملتے ہیں۔ اگر $\overline{\text{اب}} = 6$ سم، $\overline{\text{بج}} = 4$ سم، $\overline{\text{اد}} = 5$ سم، $\overline{\text{اس}} = 12$ سم ہو تو ثابت کرو کہ ب، ج، د، س متدائر نقاط ہیں ۔

10 دائرہ کھینچو۔ جس کا نصف قطر 3 سم ہے۔ مرکز م سے 5 سم کے فاصلے پر نقطہ ط لو۔ خط $\overline{\text{طقس}}$ کھینچو۔ جو دائرے کو ق، س پر ملے اور $\overline{\text{طم}}$ کے ساتھ 20° کا زاویہ بنائے۔ مماس $\overline{\text{طل}}$ کھینچو۔ اور ثابت کرو کہ
$\overline{\text{طق}} \times \overline{\text{طس}} = \overline{\text{طل}}^2$ ۔

11 دائرے کا نصف قطر ر ہے۔ ط کوئی بیرونی نقطہ ہے۔ جہاں سے وتر $\overline{\text{سع}}$ گزرتا ہے۔ ثابت کرو $\overline{\text{طس}} \times \overline{\text{طع}} = \overline{\text{مط}}^2 - \text{ر}^2$ جہاں م دائرے کا مرکز ہے۔ اگر س اور ع نقطہ ک پر منطبق ہو جائیں تو اس مسئلے کی کیا صورت ہوگی؟

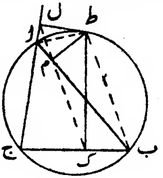
12 ا ب ج ایک متساوی الساقین △ ہے۔ جس میں $\overline{\text{اب}} = \overline{\text{اج}}$ نقطہ ب میں سے گزرتا ہوا ایک دائرہ خط $\overline{\text{اج}}$ کو نقطۂ وسطی پر مس کرتا ہے اور $\overline{\text{اب}}$ کو نقطہ ک پر کاٹتا ہے۔ ثابت کرو کہ
$\overline{\text{بک}} = 3\,\overline{\text{اک}}$ ۔

13 م مرکز والے دائرے کے کسی وتر $\overline{\text{اب}}$ کے انجاموں پر کھینچے گئے مماس نقطہ ج پر ملتے ہیں۔ $\overline{\text{جم}}$ وتر $\overline{\text{اب}}$ کو نقطہ د پر کاٹتا ہے ثابت کرو کہ
$\overline{\text{جم}} \times \overline{\text{مد}} = \text{ر}^2$ (جب ر = نصف قطر)

مسئلہ 79

(اثباتی)

مُحیط کے کسی نُقطے سے کسی مثلّث کے اضلاع پر جو دائرے کے اندر کھینچا گیا ہے عمُود ڈالے گئے ہیں ثابت کرو کہ تینوں پائے عمُود ایک خطِ مستقیم میں واقع ہیں ؛



مفروض	فرض کرو △ اب ج کے اضلاع پر دائرۂ مُحیط کے نُقطہ ط سے عمُود کھینچے گئے ہیں۔ ک، ل، م پائے عمُود ہیں ؛
مطلوب	ک، م، ل ایک خطِ مُستقیم میں واقع ہیں ؛
عمل	ک م، ل م، ط ا، ط ب کو مِلاؤ ؛
ثبوت	(1) ط ل ا اور ط م ا قائمے ہیں ∴ ط م ا ل مُتدائر ہے ؛ (2) ط ک ب اور ط م ب قائمے ہیں ∴ ط ب ک م مُتدائر ہے ؛ (3) ط ب ج ا مُتدائر ہے ؛ اب ط م ل = ط ا ل (∵ ط م ا ل مُتدائر ہے) مگر ط ا ل = ط ب ج (∵ ط ب ج ا 〃) اور ط ب ج = 180° − ط م ک (∵ ط ب ک م 〃) ∴ ط م ل = 180° − ط م ک لہٰذا ط م ل + ط م ک = 180° ∴ ک م ل خطِ مستقیم ہے ؛ (وھوَ المطلوب)

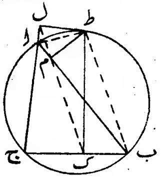
نوٹ: ک م ل کو خط پائینی یا تمسن صاحب کا خط کہتے ہیں ؛

مسئلہ 80

(اثباتی)

مسئلہ 79 کا عکس

اگر کسی نُقطے سے مثلّث کے اضلاع پر عمُود کھینچے جائیں اور پائے عمُود ایک خطِ مُستقیم میں واقع ہوں تو وُہ نُقطہ مثلّث کے دائرۂ مُحیط پر واقع ہو گا ؀



مفرُوض	فرض کرو کہ کسی نُقطہ ط سے مثلّث ا ب ج کے اضلاع پر عمُود کھینچے گئے ہیں اور پائے عمُود ک، م، ل ایک خطِ مُستقیم میں واقع ہیں ؀
مطلُوب	ط دائرہ ا ب ج کے مُحیط پر واقع ہو گا ؀
عمل	$\overline{\text{ط ا}}$ اور $\overline{\text{ط ب}}$ کو ملاؤ ؀
ثبوت	∵ ط$\hat{ل}$ا = ط$\hat{م}$ا = 90° ∴ ط ل ا م مُتدائر ہے ؀ ∵ ط$\hat{ک}$ب = ط$\hat{م}$ب = 90° ∴ ط ب ک م مُتدائر ہے ؀ ∴ ط$\hat{ب}$ک + ط$\hat{م}$ک = 180° لیکن ط$\hat{م}$ل + ط$\hat{م}$ک = 180° (∵ ک م ل خطِ مُستقیم ہے) پس ط$\hat{ب}$ک = ط$\hat{م}$ل مگر ط$\hat{م}$ل = ط$\hat{ا}$ل (∵ ط م ا ل مُتدائر ہے اور زاویے ہم قطعہ) ∴ ط$\hat{ب}$ک = ط$\hat{ا}$ل پس ط$\hat{ب}$ک + ط$\hat{ا}$ج = 180° لہٰذا ط ب ج ا مُتدائر ہے ؀ اور ط دائرہ ا ب ج کے مُحیط پر واقع ہے ؀ (فھوالمطلوب)

مشق 79، 80

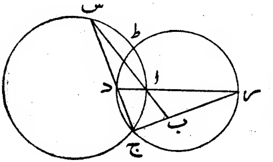
1 مثلّث اب ج کے راس ا کا پائینی خط کیا ہو گا؟

2 د کا پائینی خط معلوم کرو۔ جب اد مثلّث اب ج کے دائرۂ محیط کا قطر ہے۔

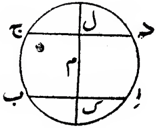
3 ثابت کرو کہ مثلّث کے دائرۂ محیط کے کسی قطر کے سروں کے پائینی خط ایک دوسرے پر علی القوائم ہیں۔

4 مثلّث کے دائرۂ محیط پر کوئی نقطہ ط لیا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ ط کا پائینی خط ط کو عمودی مرکز سے ملانے والے خط کی تنصیف کرے گا۔

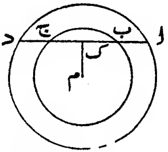
5 ایسا نقطہ معلوم کرو کہ اگر اس سے چار ضلعی شکل کے اضلاع پر عمود گرائے جائیں تو پائے عمود ایک خطِ مستقیم میں ہوں۔



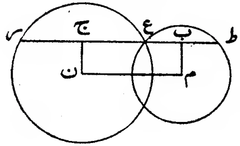
متفرّق سوالات 4



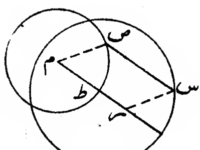
1 کسی دائرے کے مُتوازی وَتروں کے وسطی نقاط کا طریق مرکز میں سے گزرے گا اور وَتروں پر علی القوائم ہوگا ۔



2 خط ا ب ج د دو ہم مرکز دائروں کو نقاط ب، ج اور ا، د پر کاٹتا ہے۔ ثابت کرو کہ
اب = جد ۔



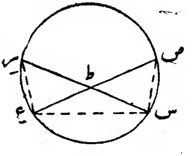
3 دو دائروں کے مرکز م اور ن ہیں۔ ان کے نقطۂ تقاطع ع سے ایک خط ط ع ر مرکزی خط م ن کے متوازی کھینچا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ
طر = ۲ م ن ۔



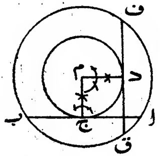
4 ص کوئی نقطہ اُس دائرے پر واقع ہے۔ جس کا مرکز م ہے۔ نقطہ ص سے خط س ص مستقل لمبائی کا مستقل سمت میں کھینچا گیا ہے۔ ص کا طریق النقاط معلوم کرو ۔

5 مُساوی دائروں میں مثلّث بنائے گئے ہیں۔ اِس طرح کہ ایک کے دو اضلاع دُوسرے کے دو اضلاع کے برابر ہیں۔ ثابت کرو کہ باقی اضلاع بھی برابر ہیں ۔

6 ثابت کرو کہ قوس کے نقطۂ وسطی کو دائرے کے مرکز سے ملانے والا خطِ وَتر کی تنصیف کرے گا ۔

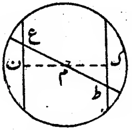


7 ص ط ع اور ر ط س دائرے کے دو مساوی وتر ایک دوسرے کو نقطہ ط پر قطع کرتے ہیں ثابت کرو کہ ان کے قطعہ دائرے مساوی ہیں ۔

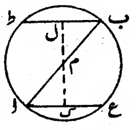


8 دائرے کا وتر کھینچو جو دیے ہوئے وتر کے مساوی ہو اور اس پر علی القوائم ہو ۔

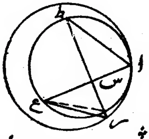
9 ج د دائرے کا وتر ہے ۔ جو قطر اب کے ساتھ 45° کا زاویہ بناتا ہے ۔ اور اسے نقطہ س پر کاٹتا ہے ۔ ثابت کرو اب^2 = 2 ج س^2 + 2 س د^2



10 دائرے کے دو متوازی وتر کسی قطر کو مرکز سے مساوی فاصلوں پر کاٹتے ہیں ۔ ثابت کرو کہ وتر مساوی ہیں ۔



11 کسی دائرے میں قطر کے سروں سے متوازی وتر کھینچے گئے ہیں ثابت کرو وہ مساوی ہیں ۔ اس کا عکس بھی ثابت کرو ۔

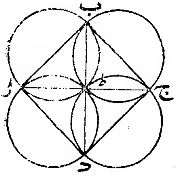


12 ایک دائرہ دوسرے دائرے کو اندرونی طور پر مس کرتا ہے ۔ اگر اندرونی دائرے کے دو نقاط کو نقطۂ تماس سے ملایا جائے تو ان کا درمیانی زاویہ بڑا ہوگا ۔ ہر اس زاویے سے جو بیرونی دائرے کے کسی نقطے کو ان نقاط سے ملا کر پیدا ہوتا ہے ۔

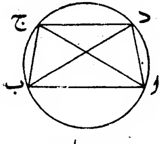
13 دو دائرے جن کے مرکز م ، ن ہیں ۔ نقطہ ج پر قطع کرتے ہیں ۔ اگر نقطہ ج میں سے خط ف ج ر کھینچا جائے جو دائروں کو ف ، ر پر ملے تو ثابت کرو کہ

ف ج س ا اعظم ترین ہوگا۔ جب وُہ م ن کے مُتوازی ہوگا ؂

14 ثابت کرو کہ اگر مُعیّن کے چاروں اضلاع کو قُطر مان کر دائرے کھینچے جائیں تو وُہ ہم نقطہ ہوں گے ؂

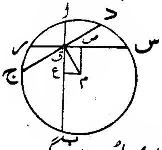


15 اگر دائرے کے اندر ذُوزنقہ بنایا جائے تو اُس کے غیر مُتوازی اضلاع مُساوی ہوں گے۔ اور اُس کے وَتر بھی مُساوی ہوں گے ؂



16 اگر چار ضلعی مُتدائر شکل کے مُتقابلہ اضلاع برابر ہوں۔ تو اُس کے وَتر بھی برابر ہوں گے ؂

17 دائرے کے تین ہم نقطہ وَتر جن کا تقاطُع مرکز پر نہ ہو۔ باہم برابر نہیں ہوسکتے ؂



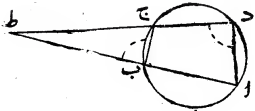
18 اگر دائرے کے اندر دو نقاط میں سے گُزرنے والے اقل ترین وَتر باہم برابر ہوں۔ تو ثابت کرو کہ وُہ نقطے مرکز سے مُساوی البُعد ہوں گے ؂

19 دو مُساوی دائرے کسی خط پر مُساوی وَتر کاٹتے ہیں۔ ثابت کرو کہ وُہ خط یا مرکزوں کو مِلانے والے خط کے مُتوازی ہے یا عمُودی ناصِف ؂

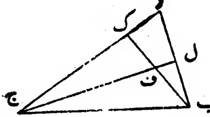
20 اگر مُتدائر △ ا ب ج کا زاویہ ا مُستقل ہو تو ثابت کرو کہ خط ب ج ہمیشہ ایک ہم مرکز دائرے کا مماس ہوگا ؂

21 ا ب ج ایک مُتساوی السّاقین مُثلّث ہے خط لا ما قاعدہ ب ج کے مُتوازی کھینچا گیا ہے۔ جو مُتساوی اضلاع کو لا، ما میں کاٹتا ہے۔ ثابت کرو کہ ب، ج، لا، ما مُتدائر ہیں ؂

22 ا ب ج د مُتدائر چار ضلعی شکل ہے۔ ا ب، د ج بڑھانے سے نُقط ط پر

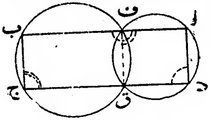


ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ
△ن اطد اور ب طج
متساوی الزّوایا ہیں ۔

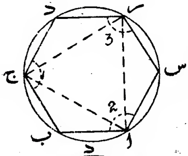


23 ب ک، ج ل △ اب ج کے ارتفاع ایک دوسرے کو نقطہ ف پر کاٹتے ہیں۔ ثابت کرو ال ف ک متدائرہ ذواربعۃ الاضلاع ہے ۔

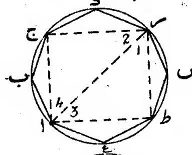
24 اا^ع اب ج د کے اضلاع ب ج، اد میں ر، س دو نقطے ہیں۔ اگر اب ر س متدائر ہو تو ثابت کرو س ر ج د بھی متدائر ہو گا ۔



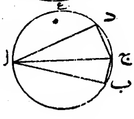
25 اب، ج د دو خط ہیں۔ جو دو دائروں کے نقاطِ تقاطع میں سے گزرتے ہیں۔ ثابت کرو کہ اب ج د ذوزنقہ ہے ۔



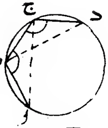
26 اگر دائرے کے اندر شکل مسدّس کھینچی جائے۔ تو ثابت کرو کہ اس کے متبادل زاویوں کا مجموعہ ۴ قائموں کے برابر ہو گا ۔



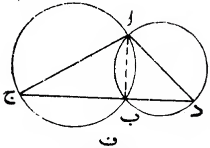
27 اگر دائرے کے اندر شکل مثمّن کھینچی جائے۔ تو ثابت کرو کہ اس کے متبادل زاویوں کا مجموعہ 6 قائموں کے برابر ہو گا ۔



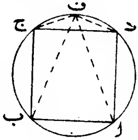
28 اگر کسی متدائر چار ضلعی شکل کا وتر اس زاویے کی تنصیف کرتا ہے۔ جس میں سے یہ گزرتا ہے تو ثابت کرو کہ یہ دائرہ متدائر کا قطر ہے ۔



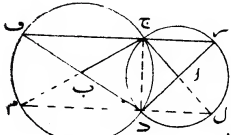
29 اگر کسی دائرے میں مُتساوی الاضلاع
شکل بنائی جائے - تو وُہ
مُتساوی الزّوایا بھی ہوگی ؏



30 دو دائرے ایک دوسرے کو
نقاط ا، ب پر قطع کرتے ہیں -
اگر اج اور اد قطر ہوں - تو
ثابت کرو کہ ب ج اور ب د ایک
خطِ مستقیم میں ہیں ؏



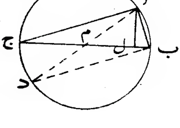
31 کسی دائرے میں ایک مُربّع بنایا
گیا ہے - ثابت کرو کہ محیط کے
کسی نقطے پر ایک ضلع کا مُتقابلہ
زاویہ دُوسرے کسی ضلع کے مُتقابلہ
زاویے سے تِگنا ہوگا ؏



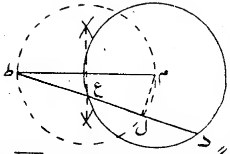
32 دو دائرے جن کے مرکز ا، ب ہیں
نقاط ج، د پر ایک دُوسرے کو قطع
کرتے ہیں - ج میں سے خط س ج ف
کھینچا گیا ہے جو س، ف پر ملتا ہے
ثابت کرو کہ ا جˆ ب = س دˆ ف ؏

33 اگر دائرے کے دو وَتر ایک دُوسرے کو کسی بیرُونی نُقطے پر ملیں تو ان کا درمیانی زاویہ
اُس محیطی زاویے کے برابر ہوگا - جس کی قوس دونوں قوسوں کے فرق کے برابر ہو ؏

34 دو دائروں کے نصف قطر 3 سم اور 4 سم ہیں - اُن کے مرکز ا، ب ہیں - جن کا باہمی
فاصلہ 5 سم ہے - اگر یہ دائرے نقاط ف، ق پر ایک دُوسرے کو قطع کریں اور
اب دائروں کو نقاط س، ش پر (ا اور ب کے درمیان) کاٹے - تو ثابت کرو کہ
ف سˆ ق + ف شˆ ق = 3 قائمے ؏

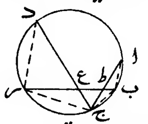


35 ا ب ج مُنداِئر مُثلّث ہے - اگر
ال ارتفاع اور اد دائرے کا قطر
ہو تو ثابت کرو کہ △ن ا د ب اور
ا ب ل مُتساوی الزّوایا ہیں ؏



36 دائرے کے اُن وتروں کے نقاطِ وسطی کا طریق معلوم کرو جو ایک ہی نقطے سے (خواہ دائرے کے اندر خواہ باہر) گزرتے ہیں ۔

37 اب دائرے کا مستقل وتر ہے اور اف ب کوئی مثلث دائرے میں بنایا گیا ہے۔ ا، ب سے ب ف اور ف ا پر عمود گرائے گئے ہیں۔ جو نقطہ م پر ملتے ہیں۔ م کا طریق معلوم کرو ۔

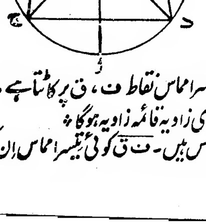


38 نقاط ا، ب، ج، ر، د کسی دائرے پر واقع ہیں۔ اگر قوس اب = قوس ب ج اور قوس ج ر = قوس ر د ثابت کرو کہ خط ب ر خطوط اج، ج د سے مساوی زاویے بناتا ہے ۔

39 اگر دا، د ب کسی نقطہ د سے دائرے پر مماس ہوں اور م دائرے کا مرکز ہو تو ثابت کرو:۔

ادب = 2 م اب

40 کسی دائرے میں وتر کے سروں پر کے مماس اُس قطر پر ملتے ہیں جو وتر کی تنصیف قائمے زاویوں پر کرتا ہے ۔

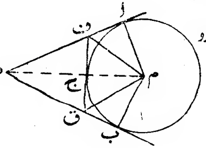


41 کسی دائرے میں ج د وتر ہے جو قطر اب پر عمود ہے۔ ط کوئی نقطہ اب پر واقع ہے۔ اگر خطوط ج ط، د ط محیط کو ر، س پر ملیں تو ثابت کرو:۔

ج ر = د س اور ر س عمود ہے اب پر ۔

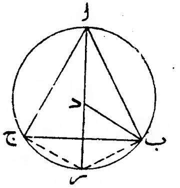
42 دائرے کے دو متوازی مماسوں کو ایک تیسرا مماس نقاط ف، ق پر کاٹتا ہے۔ ثابت کرو کہ خط ف ق کے بالمقابل مرکزی زاویہ قائمہ زاویہ ہوگا ۔

43 دا اور د ب دائرے کے دو مستقل مماس ہیں۔ ف ق کوئی تیسرا مماس ان کو



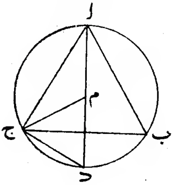
نقاط ف، ق پر کاٹتا ہے۔ ثابت کرو کہ فق کے بالمقابل مرکزی زاویہ مستقل ہوگا۔

44 سوال 43 کی شکل میں ثابت کرو کہ △ دفق کا احاطہ مستقل ہے۔



45 △ اب ج دائرے کے اندر واقع ہے۔ خط اس زاویہ ا کا ناصف محیط کو س پر ملتا ہے۔ ب کا ناصف ب د خط اس کو د پر ملتا ہے۔

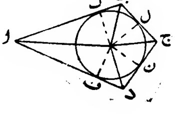
ثابت کرو کہ سج = سب = سد



46 اب ج متساوی الاضلاع △ ہے جس کے دائرۂ محیط کا مرکز م ہے۔ ام کو بڑھایا گیا ہے جو محیط کو د پر ملتا ہے۔ ثابت کرو △ م ج د متساوی الاضلاع ہے۔

47 ثابت کرو کہ پائینی مثلث کے اضلاع اصلی مثلث کے اضلاع سے مساوی زاویے بناتے ہیں اور اگر ع اصلی مثلث اب ج کا عمودی مرکز ہو تو △ ع ب ج کا عمودی مرکز پائینی مثلث کا اندرونی مرکز ہوگا۔

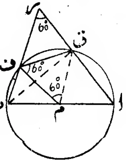
48 اب، اج دائرے کے دو وتر ہیں۔ خط ب د مماس ا کے متوازی کھینچا گیا ہے اور وہ اج کو د پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ اب د مساوی ہے یا تتمہ ہے ب ج د کا۔ اس طرح ثابت کرو کہ دائرہ ب ج د خط اب کو نقطہ ب پر مس کرے گا۔



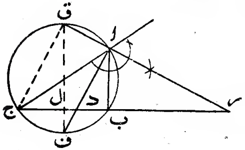
49 اب ج د چار ضلعی شکل ہے۔ جو دائرے کے گرد کھینچی گئی ہے۔ دائرے کا مرکز م ہے۔ ثابت کرو

ام ب + ج م د = 180°

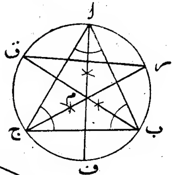
50 ا ب ج د متدائر چوکور ہے۔ اگر ج پر کا مماس ب د کے متوازی ہو تو ثابت کرو
ج ا زاویہ ب ا د کا ناصف ہے۔



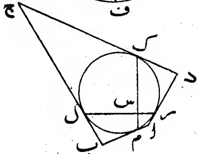
51 ا ب دائرہ کا مستقل قطر ہے ف ق
کوئی وتر ہے۔ جس کا طول دائرے
کے نصف قطر کے برابر ہے۔ ا ق،
ب ف کو ملا کر بڑھایا گیا ہے تاآنکہ وہ
نقطہ س پر ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ
ف ق کے ہر مقام کے لیے زاویہ س مستقل ہے۔



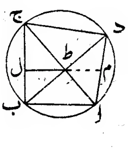
52 مثلث ا ب ج کے زاویہ ا کے
اندرونی اور بیرونی ناصف قاعدہ
ب ج کو د، س پر ملتے ہیں اور
دائرۂ محیط کو ف، ق پر کاٹتے ہیں
ثابت کرو کہ ف ق دائرہ ا ب ج کا
قطر ہے جو ب ج پر عمود ہے۔



53 ا، ب، ج دائرے پر تین نقاط
ہیں۔ زاویوں کے ناصف محیط کو
نقاط ف، ق اور س پر ملتے ہیں۔
ثابت کرو کہ خط ق س عمود ہے
ا ف پر۔



54 ک م اور ل س دائرے کے
دو وتر ہیں جو علی القوائم ہیں۔
ثابت کرو کہ ک، ل، م، س
کے مماس متدائر چوکور بناتے ہیں۔



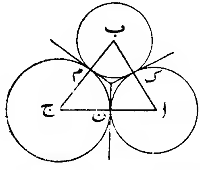
55 ایک متدائر چار ضلعی شکل
کے وتر ایک دوسرے پر
علی القوائم واقع ہوئے ہیں
نقطۂ تقاطع سے ایک ضلع
پر عمود گرایا گیا ہے۔ ثابت کرو

کہ اگر یہ عمود دُوسری طرف بڑھایا جائے تو مُقابلہ ضلع کی تنصیف کرے گا ۔

56 اب ج د مُتدائر چار ضلعی شکل ہے۔ جس کے وَتر اج ، ب د علی القوائم نقطہ و پر ایک دُوسرے کو قطع کرتے ہیں۔ ا ی خط ب ج (بشرط ضرورت) بڑھا کر عمود ا ی کھینچا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ اگر و سے ب ج عمود کھینچا جائے تو وُہ بڑھ کر د ی کی تنصیف کرے گا ۔

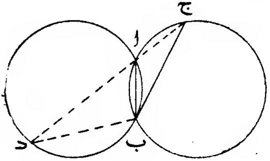
(برہم گپتا کا مسئلہ)

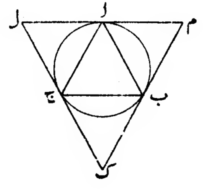
57 تین دائرے ایک دُوسرے کو دو دو کر کے بیرُونی طور پر مس کرتے ہیں ثابت کرو کہ نقاط تماس پر جو مماس کھینچے جائیں گے وُہ ہم نقطہ ہوں گے ۔



58 تین دائرے ایک دُوسرے کو دو دو کر کے بیرُونی طور پر نقاط ف ، ق ، س پر مس کرتے ہیں ۔ اگر ف ق ، ف س کو بڑھایا جائے تاکہ وہ ق س میں سے گزرنے والے دائرے کو لا ، ما پر ملیں تو لا ما تیسرے دائرے کا قطر ہو گا اور پہلے دو دائروں کے خطِ مرکز کے ‖ ہو گا ۔

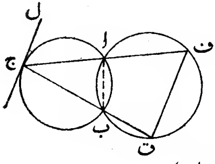
59 دو مُساوی دائرے نقاط ا ، ب پر ایک دُوسرے کو کاٹتے ہیں ۔ اُن میں سے ایک میں وَتر اج = اب لگایا گیا ہے ۔ ثابت کرو کہ ب ج دُوسرے دائرے کا مماس ہو گا ۔



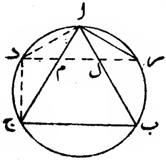


60 مثلث اب ج کا دائرۂ محیط کھینچا گیا ہے ۔ نقاط ا ، ب ، ج پر کے مماس ایک اور مثلث ک ل م کے زاویے علی الترتیب

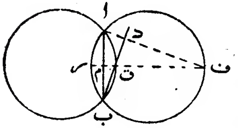
مثلث اب ج کے دوچند زاویوں کے تتمہ زاویے ہیں۔



61 دو دائرے اب ج اور اب ف نقاط ا، ب پر ایک دوسرے کو کاٹتے ہیں۔ ایک دائرے کے نقطہ ج سے خطوط ج ا اور ج ب کھینچے گئے ہیں جو دوسرے دائرے کو ف، ق پر ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ ف ق متوازی ہے نقطہ ج پر کے مماس کا۔



62 اب ج ایک متساوی الاضلاع مثلث ہے۔ د، س قوس اج اور اب کے نقاط وسطی ہیں۔ ثابت کرو کہ خط د س کے نقاطِ تثلیث اب، اج پر واقع ہیں۔

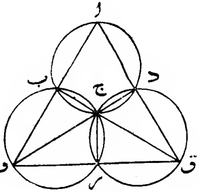


63 دو مساوی دائرے ایک دوسرے کو نقاط ا، ب پر قطع کرتے ہیں اب پر کوئی عمود کھینچا گیا ہے جو دائروں کو ایک طرف نقاط ف، ق پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ خط ب ق خط ا ف پر عمود ہے۔

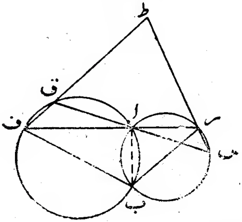
64 دو دائرے ایک دوسرے کو نقاط ا، ب پر قطع کرتے ہیں اور ایک خطِ مستقیم ف ا ق دائروں کو ف، ق پر ملتا ہے اگر ف اور ق پر کے مماس نقطہ ط پر ملیں۔ تو ثابت کرو کہ ف، ب، ق اور ط متدائر ہیں۔

65 اگر دو دائرے ایک دوسرے کو قطع کریں تو ثابت کرو کہ نقاطِ تقاطع پر جو زاویے کسی مشترک مماس کے سامنے واقع ہیں وہ ایک دوسرے کے تتمہ زاویے ہیں۔

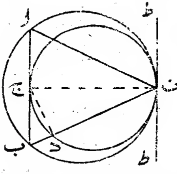
66 چار ضلعی متدائر شکل اب ج د کے متقابلہ اضلاع بڑھائے جانے پر نقاط ف، ق



پر ملتے ہیں △ ب ج ف اور
ج د ق پر دائرے کھینچے گئے ہیں
جو نقطہ س پر ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ
نقاط ف ، س ، ق ایک ہی خطِ
مستقیم میں ہیں ؎

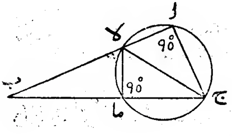


67 دو دائرے ایک دوسرے کو نقاط
ا ، ب پر قطع کرتے ہیں۔ نقطہ ا
میں سے دو خط ف ا س اور ق ا س
کھینچے گئے ہیں۔ جو دائروں کو
ق ، س ، س پر ملتے ہیں۔
ف ق اور س س کو بڑھایا گیا
ہے جو نقطہ ط پر ملتے ہیں۔ ثابت کرو
کہ ط ف ب س مُندائرِ چوکور ہے ؎



68 دو دائرے ایک دوسرے کو اندرونی
طور پر نقطہ ف پر مس کرتے ہیں۔
بیرونی دائرے کا وتر ا ب اندرونی
دائرے کو نقطہ ج پر مس کرتا ہے۔
ثابت کرو کہ ا ف̂ ج = ب ف̂ ج

69 دو دائرے ایک دوسرے کو اندرونی طور پر ف پر مس کرتے ہیں۔ اور کوئی وتر ا ق
کھینچا گیا ہے جو اُن کو ف ، ق پر کاٹتا ہے۔ اگر ف پر کا مماس بیرونی دائرے کو
نقاط ک ، ل پر ملے تو ثابت کرو کہ
ک ق = ل ق



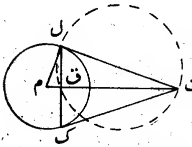
70 ا ب ج مثلث ہے۔ جس کا
زاویہ ا̂ قائمہ ہے۔ ا ب پر کے
کسی نقطہ لا سے ب ج پر عمود
لا ما گرایا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ
ب ا × ب لا = ب ج × ب ما

71 دو مُساوی دائروں کے مرکز ملائے گئے ہیں اور مرکزی خط کے نُقطۂ وسطی ف سے دو قاطع ف ا ب اور ف ج د دائروں پر کھینچے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ ا، ب، د، ج مُندائر ہیں ؛

72 ایک مثلّث کا ایک ضلع دُوسرے مثلّث کے ایک ضلع کے برابر ہے اور اُن اضلاع کے مُتقابلہ زاویے ایک دُوسرے کا تتمّہ ہیں۔ ثابت کرو کہ دونوں مثلّثوں کے دوائرِ مُحیط مُساوی ہیں ؛

73 مثلّث ا ب ج کے ارتفاع نقطہ ط پر ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ △ں ا ب ج ، ط ب ج کے دوائر مُساوی ہیں ؛

74 اگر کسی بیرُونی نقطہ ف سے ایک دائرے تک جس کا مرکز م ہے اور نصف قُطر ر ہے۔ دو مماس کھینچے جائیں اور اگر ف م وتر مماس کو ق پر ملے تو ثابت کرو کہ



م ف × م ق = ر² ؛

75 مثلّث ا ب ج کا زاویہ ا قائمہ ہے وتر ب ج پر کسی نقطہ لا سے خط لا ی کھینچا گیا ہے۔ جو ب ج پر عمُود ہے اور ب ا کو ی پر ملتا ہے ثابت کرو کہ

لا ی² = ج لا × لا ب ـــ ی ا × ی ب ؛

76 اگر دائرے کے کسی بیرُونی نقطہ ف سے کسی قُطر ا ب پر عمُود ف م گرایا جائے اور ف ج د کوئی خطِ قاطع ہو تو ثابت کرو :-

ف م² = ف ج × ف د + ا م × م ب ؛

77 دائرے کے کسی قُطر میں دو نقاط ف ، ق مرکز م سے مُساوی البُعد ہیں۔ ف میں سے وتر لا ف ما کھینچا گیا ہے اور اس کے سِرے نقطہ ق سے ملائے گئے ہیں ثابت کرو کہ لا ق² + ق ما² + لا ما² ہمیشہ مستقل ہوگا ؛

78 دائرہ کھینچو جو دو نقاطِ معلُومہ میں سے گُزرے اور دیئے ہُوئے خط کو مس کرے ؛

79 ״ ״ ״ ״ ״ ״ دائرے کو مس کرے ؛

80 کسی دائرے کا نصف قُطر 4.3 سم ہے ا ب اُس کا کوئی وتر ہے۔ جس کو نقطہ ف 7 : 10 کی نسبت میں تقسیم کرتا ہے اگر ف کا فاصلہ مرکز سے 2.7 سم ہو تو وتر کا طُول معلُوم کرو ؛

81 ا، ب، ج، د چار نُقطے بالتّرتیب ایک خطِ مُستقیم میں ہیں۔ اُسی خط میں ایک اور نقطہ ط معلوم کرو تاکہ مُستطیل طا × طج = مُستطیل طب × طد ؀

82 اگر △ ا ب ج کا عمُودی مرکز ط ہو اور اس کے اِرتفاع دائرۂ مُحیط کو ک، ل، م پر مِلیں تو ثابت کرو کہ ا، ب، ج مثلّثان ل ط م، م ط ک، ک ط ل کے مرکزِ مُحیط ہیں ؀

83 ثابت کرو کہ مُثلّث کے اندرُونی مرکز کو خارجی مراکز سے مِلانے والے خطُوط کی تنصیف دائرۂ مُحیط پر ہوتی ہے ؀

84 مُثلّث کا اندرُونی مرکز اور دو خارجی مرکز معلُوم ہیں۔ مُثلّث بناؤ ؀

85 ا کوئی نُقطہ دائرے کے اندر ہے۔ وَتر ب ج کی تنصیف نقطہ ا پر ہوتی ہے۔ ط ف، ط ق دو مماس ہیں۔ جن کا وَتر مماس ا میں سے گُزرتا ہے۔ اگر ب ج کو بڑھائیں تو وُہ ط ف، ط ق کو م، ن پر مِلتا ہے۔ ثابت کرو کہ ا م = ا ن ؀

86 دائرے کے دو وَتر ا ج اور ب د علی القوائم ی پر مِلتے ہیں۔ ج د کو مِلاؤ۔ اور ا ف کو ج د پر عمُوداً کھینچو تاکہ وہ ب د کو نقطہ ک پر مِلے۔ ثابت کرو کہ ب ی = ی ک ؀

87 کسی مُتدائر چوکور کے وتر علی القوائم واقع ہُوئے ہیں۔ ثابت کرو کہ مرکزِ مُحیط کا فاصلہ کسی ضِلعے سے متقابلہ ضِلعے کا نِصف ہے ؀

88 اگر کسی مثلّث کے اضلاع پر مُتساوی الاضلاع مُثلّث باہر کی طرف بنائے جائیں تو ثابت کرو کہ اِن مُتساوی الاضلاع مثلّثوں کے دوائرِ مُحیط ہم نقطہ ہوں گے ؀

89 ایک دائرے کا مرکز م ہے۔ اس کے اندر ایک ہی قطعہ دائرے میں ا ب مُشترک قاعدہ پر دو مُثلّث ا ب ج اور ا ب د واقع ہیں۔ اگر اُن کے زاویے ب اؔ ج اور ا بؔ د برابر ہوں۔ اور ا ج، ب د کا س نقطۂ اِنقطاع ہو تو ثابت کرو کہ مُثلّث م س ج اور م س د منطبق ہیں ؀

پانچواں حصّہ

1 **تعریفات:** جیسا ہم پہلے بیان کر آئے ہیں۔ کثیرُالاضلاع وُہ شکل مُستوی ہے جو چار سے زیادہ مُستقیم خطوں سے گھری ہو۔

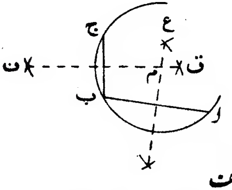
2 جب کثیرُالاضلاع کے تمام ضلعے برابر ہوں تو اُسے **مُتساوی الاضلاع** کہتے ہیں بعض لوگ متساوی کی جگہ لفظ مُساوی اِستعمال کرنے لگے ہیں۔

3 جب کثیرُالاضلاع کے تمام زاویے برابر ہوں تو اُسے **مُتساوی الزّوایا** کہتے ہیں۔

4 جب کثیرُالاضلاع کے تمام ضلعے اور تمام زاویے برابر ہوں۔ تو اُسے **مُنتظم کثیرُالاضلاع** کہتے ہیں۔

5 ذیل میں ہم ایک ضروری مسئلہ درج کرتے ہیں:۔

اُس دائرے کا مرکز دریافت کرنا جس کی قوس دی ہوئی ہو۔



فرض کرو اب ج دائرے کی قوس ہے

اب ، ب ج کو مِلاؤ۔

اب ، ب ج کے عمُودی ناصف س ع ، ف ق کھینچو جو نقطہ م پر ملیں

دائرے کا مرکز م ہوگا۔

ثبوت: اب وَتر ہے اُس کا عمُودی ناصف مرکزِ دائرہ میں سے گزرے گا۔ (نتیجۂ صریح مسئلہ 61)

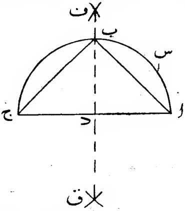
ب ج وَتر ہے اُس کا عمُودی ناصف مرکز میں سے گزرے گا۔ (نتیجۂ صریح مسئلہ 61)

پس اب اور ب ج کا نُقطۂ تقاطع م دائرے کا مرکز ہے۔

مسئلہ 81

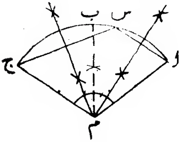
(عملی)

دائرے کی دی ہوئی قوس کی تنصیف کرنا ۔



معلوم	فرض کرو اس ج کسی دائرے کی قوس ہے ۔
مطلوب	اس ج کی تنصیف کرنا ہے ۔
عمل	(1) وتر اج کو ملاؤ ۔ (2) اج کا عمودی ناصف ف ق کھینچو جو قوس کو ب پر کاٹے ۔ قوس کی تنصیف نقطہ ب پر ہوگی ۔
ثبوت	اب ، ب ج کو ملاؤ ۔ مثلثان اب د ، ج ب د میں اد = د ج (عملاً) ∵ ∠ادب = ∠ج د ب = 90° (بروئے عمل) ب د مشترک ہے ∴ مثلث منطبق ہیں اور وتر اب = وتر ج ب پس قوس اب = قوس ج ب (فہو المطلوب)

دُوسری ترکیب

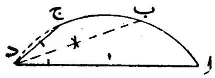


عمل: (1) اَس ، سَج کے عمُودی ناصف لو جو م پر قطع کریں ۔ م دائرے کا مرکز ہو گا ۔

(2) م ا ، م ج کو ملاؤ ۔

(3) زاویہ ا م ج کی تنصیف خط م ب سے کرو جو قوس کو نقطہ ب پر کاٹے ۔ م ب قوس ا س ج کا ناصف ہو گا ۔

تیسری ترکیب



عمل: (1) قوس ا ج کو نقطہ د تک کچھ اور بڑھاؤ ۔

(2) د ا ، د ج کو ملاؤ ۔

(3) زاویہ ا د ج کا ناصف د ب کھینچو جو قوس کو ب پر ملے قوس کی تنصیف نقطہ ب پر ہو جائے گی ۔

مشق 81

1 دی ہوئی قوس کو چار مساوی حصوں میں تقسیم کرو ۔

2 نصف دائرے کو آٹھ " " " " ۔

3 اگر دائرے کا مماس اُس کے کسی وتر کے متوازی ہو تو وتر سے کٹی ہوئی قوس کی تنصیف نقطہ مماس پر ہو گی ۔

4 قوس ا ب میں کوئی نقطہ د لو ۔ د ا اور د ب کو ملاؤ ۔ زاویہ ا د ب کا بیرونی ناصف د ج نکالو ۔ جو قوس کو ج پر قطع کرے ۔ ثابت کرو کہ ج قوس ا ب کا وسطی نقطہ ہو گا ۔

5 اُ نصف قطر کا دائرہ کھینچو اور نصف دائرے کو

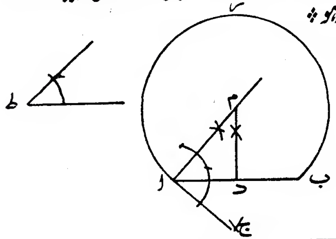
(i) 3 مساوی حصوں میں تقسیم کرو ۔

(ii) 6 مساوی حصوں میں تقسیم کرو ۔

مسئلہ 82

(عملی)

دِیے ہُوئے خط پر قطعہ دائرہ بنانا جِس کا زاویہ فی القطعہ کِسی دِیے ہُوئے زاویے کے برابر ہو ؛

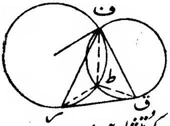


معلوم	فرض کرو خط اب اور زاویہ ط دِیے ہُوئے ہیں ؛
مطلوب	اب پر قطعہ دائرہ بنانا ہے ۔ جِس کا زاویہ فی القطعہ ط کے برابر ہو ؛
عمل	(۱) زاویہ ب اج = ط بناؤ ؛ (۲) خط ام خط اج پر عمُوداً کھینچو ؛ (۳) خط اب کی عمُودی تنصیف خط دم سے کرو جو ام کو م پر ملے ؛ (۴) م کو مرکز اور م ا کو نصف قطر مان کر دائرہ کھینچو دائرے کا حصّہ ا ر ب جو ج کے بالمقابل ہے مطلوبہ قطعہ ہو گا ؛
ثبوت	؛ م خط اب کے عمُودی ناصف پر واقع ہے ؛ ∴ م ا = م ب ∴ دائرہ نقطہ ب میں سے بھی گزُرے گا ؛ نیز م اج = 90° پس اج دائرہ کا مماس ہے ؛ پس ب اج متبادلہ قطعہ ا ر ب کے زاویے کے برابر ہے ۔ مگر ب اج = ط پس ا ر ب ایسا قطعہ دائرہ ہے ۔ جِس کا زاویہ فی القطعہ ط کے برابر ہے ؛ (فہو المطلوب)

نتیجۂ صریح: مثلّث کا قاعدہ معلوم ہو اور راسی زاویہ دیا ہو تو راس کا طریق النقاط وہ قطعہ دائرہ ہو گا۔ جس کا زاویہ فی القطعہ راسی زاویے کے برابر ہے ۔

مشق 82

1 دیے ہوئے دائرے سے وہ قطعہ دائرہ کاٹو۔ جس کا زاویہ فی القطعہ دیے ہوئے زاویے کے برابر ہو ۔



2 مثلّث ف ق ر کے اندر ایسا نقطہ ط معلوم کرو۔ کہ
ط فَ̂ ق = ط قَ̂ ر = ط رَ̂ ف ۔

3 دیے ہوئے خط پر قطعہ دائرہ بناؤ جو کسی دیے ہوئے قطعے کے متشابہ ہو ۔

4 مثلّث ا ب ج کے ضلع ا ج میں (یا ا ج کو بڑھا کر) نقطہ م معلوم کرو ایسا کہ ا م × ا ج = ا ب²

5 مثلّث بناؤ۔ جس کا قاعدہ ایک سم، راسی زاویہ °40 اور ارتفاع 1.1 سم ہو ۔

6 ایک مثلّث بناؤ اور اس میں ایسا نقطہ دریافت کرو۔ جہاں تینوں اضلاع مساوی زاویے بنائیں ۔
[نوٹ: دو ضلعوں پر ایسے قطعے بناؤ۔ جن میں زاویہ °120 ہو]

7 دیے ہوئے خط پر قطعہ دائرہ بناؤ۔ جس کا زاویہ فی القطعہ (1) °45 (2) °60 (3) °120 ہو ۔

8 △ ا ب ج بناؤ۔ جس کا ضلع ب ج = 2.1 گ، أ̂ = °60 اور ط ب + ط ج = 2.0 گ ہو ۔

9 تکون بناؤ۔ جس کا
(1) قاعدہ ۔ راسی زاویہ اور ایک ضلع معلوم ہوں ۔
(2) قاعدہ ۔ راسی زاویہ اور قاعدہ پر کا وسطانیہ معلوم ہوں ۔

10 2 سم، 2.5 سم اور 3 سم اضلاع سے مثلّث بناؤ اور 2.1 گ نصف قطر والے دائرے میں ایک مثلّث بناؤ جو پہلے مثلّث کے مساوی الزّوایا ہو ۔

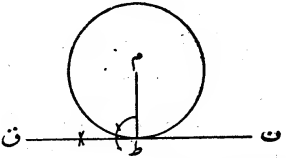
11 ثابت کرو کہ دو متدائر مثلّث جو کسی تیسرے مثلّث کے مساوی الزّوایا ہیں ۔ باہم ہر لحاظ سے برابر ہوتے ہیں ۔

مسئلہ 83

(عملی)

(حصّۂ اوّل)

ایک دیے ہوئے نقطے سے جو محیط پر واقع ہو دائرے کا خطِ مماس کھینچنا

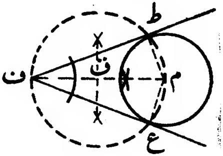


معلوم	دائرہ جس کا مرکز م ہے اور محیط پر کوئی نقطہ ط ہے ۔
مطلوب	ط پر دائرے کا مماس کھینچنا ۔
عمل	(۱) طم کو ملاؤ ۔ (2) خط ف ط ق خط طم پر عمود اً نکالو ۔ ف ط ق مطلوبہ مماس ہوگا ۔
ثبوت	∵ ف ط ق خط طم پر عمود ہے اور طم دائرے کا نصف قطر ہے ۔ ∴ ف ط ق دائرے کا مماس ہے ۔ (فھوَ المطلوب)

مسئلہ 83

(عملی) حصّۂ دوم

ایک دیے ہُوئے نُقطے سے جو محُیط کے باہر ہے دائرے پر خطِ مماس کھینچنا ۔

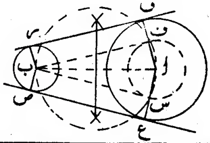


معلوم	دائرہ جس کا مرکز م ہے اور ف کوئی نُقطہ محُیط سے باہر ہے ۔
مطلوب	ف سے دائرے پر خطِ مماس کھینچنا ۔
عمل	(1) م ف کو مِلاؤ ۔ (2) ف م کی تنصیف نُقطہ ق پر کرو ۔ (3) ق کو مرکز مان کر ق ف کی دُوری سے دائرہ کھینچو ۔ جو دیے ہُوئے دائرے کو نُقاط ط ، ع پر ملے ۔ (4) ف ط اور ف ع کو مِلاؤ ۔ ف ط اور ف ع مطلوبہ مماس ہوں گے ۔
ثبوت	م ط ، م ع کو ملاؤ ۔ م ط ف دائرے کے قُطر پر کا زاویہ ہے اس لیے قائمہ ہے ۔ اور م ط دیے ہُوئے دائرے کا نصف قُطر ہے ۔ ∴ ف ط دیے ہُوئے دائرے پر مماس ہے ۔ اِسی طرح ف ع دیے ہُوئے دائرے پر مماس ہے ۔ (فھوا المطلوب)

مسئلہ 84

(عملی) حصّۂ اوّل

دو دائروں کا مُستقیم مُشترک خطِ مماس کھینچنا ؞

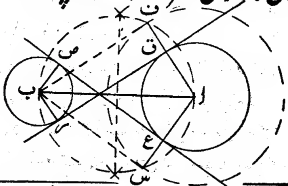


معلُوم	دو دائرے جن کے مرکز ا، ب ہیں اور جن کے نصف قطر لمبائی میں ل اور م کے برابر ہیں۔ فرض کرو ا بڑے دائرے کا مرکز ہے ؞
مطلُوب	اِن دِیے ہُوئے دائروں کا مُستقیم مُشترک خطِ مماس کھینچنا ؞
عمل	(1) اب کو مِلاؤ اور اُس کو قُطر مان کر اُس پر دائرہ کھینچو ؞ (2) ا کو مرکز مان کر (ل ــ م) نِصف قُطر سے ایک دائرہ کھینچو۔ جو اُوپر کے دائرے کو نقاط ف، س پر کاٹے ؞ (3) اف، اس کو مِلاؤ اور اُن کو بڑھاؤ تاکہ وُہ دیے ہُوئے بڑے دائرے کو نُقاط ق، ع پر ملیں ؞ (4) ب ر، ب ص کو اف ق، اس ع کے ‖ کھینچو ؞ (5) ق ر، ع ص کو ملاؤ۔ یہی مطلُوبہ خطِ مماس ہوں گے ؞
ثبوت	ب ف کو مِلاؤ ؞ ∵ ف ق مُساوی اور ‖ ہے ب ر کے ∴ ف ق ر ب ‖ع ہے لیکن اف ب = 90° (کیونکہ نِصف دائرے میں واقع ہے) ∴ ‖ع ف ق ر ب کے سب زاویے قائمہ ہیں۔ اور ق ر خطُوط اف ق، ب ر پر علی القوائم ہے۔ لہٰذا ق ر دونوں دائروں کا مماس ہے۔ اِسی طرح ع ص دونوں دائروں کا مماس ہے ؞ (فہوَ المطلُوب)

مسئلہ 84

(عملی) (حصۂ دوم)

دو دائروں کا معکوس مشترک خطِ مماس کھینچنا ؛



معلوم	دو دائرے جن کے مرکز ا، ب ہیں اور جن کے نصف قطر لمبائی میں ل اور م کے برابر ہیں۔ فرض کرو بڑے دائرے کا مرکز ا ہے ؛
مطلوب	دیے ہوئے دائروں کا معکوس مشترک خطِ مماس کھینچنا ؛
عمل	(1) اب کو ملاؤ اور اس کو قطر مان کر اس پر دائرہ کھینچو ؛ (2) ا کو مرکز مان کر (ل + م) نصف قطر سے دائرہ کھینچو جو اُوپر کے دائرے کو نقاط ف، س پر کاٹے ؛ (3) اف، اس کو ملاؤ جو بڑے دائرے کو نقاط ق، ع پر کاٹیں ؛ (4) ب ر، ب ص کو اق ف اور اع س کے ‖ کھینچو ؛ (5) ق ر، ص ع کو ملاؤ یہی مطلوبہ خطِ مماس ہوں گے ؛
ثبوت	ب ف کو ملاؤ ؛ اب ف ق ر ب ‖اع ہے (کیونکہ ف ق = اور ‖ ہے ب ر کے) لیکن ف^ قائمہ ہے (کیونکہ وُہ نصف دائرہ میں ہے) پس ‖اع ف ق ر ب کے تمام زاویے قائمے ہیں ؛ پس ق ر عمود ہے اق اور ب ر پر جو دائروں کے نصف قطر ہیں لہٰذا ق ر دونوں پر عمود ہے ؛ اسی طرح ع س دونوں دائروں پر عمود ہے ؛ (فہوالمطلوب)

مشق 83

1 دائرہ بناؤ۔ جس کا نصف قطر 1″ ہو۔ مرکز سے 5 سم فاصلے پر کوئی نقطہ ط لو۔ اور اس سے دائرے کے دو مماس کھینچو۔

2 دائرہ کھینچو جس کا نصف قطر 1″ ہے اور مرکز سے 2″ کے فاصلے پر کسی نقطے سے دائرے پر دو مماس کھینچو۔ دونوں مماسوں کا درمیانی زاویہ اور مماس کی لمبائی ناپو۔

3 دائرہ بناؤ۔ جس کا نصف قطر .7″ ہے۔ مرکز میں سے کوئی خط کھینچو۔ اس پر دو نقطے لو جو مرکز سے 2.3″ کے فاصلے پر ہوں۔ ان نقاط سے دائرے پر مماس کھینچو۔

4 کوئی خط 3.3″ لمبا لو اور اسے ج پر اس طرح تقسیم کرو کہ اج : جب = 8:3
جب کو قطر مان کر اس پر دائرہ کھینچو۔ اور اس دائرے پر نقطہ ا سے دو مماس کھینچو۔

مشق 84

1 دو دائرے ہیں۔ جن کے نصف قطر 5 سم اور 2 سم کے برابر ہیں اور جن کے مرکزوں میں 8 سم کا فاصلہ ہے۔ ان کے مستقیم مشترک خط مماس کھینچو۔

2 دو دائرے کھینچو جن کے نصف قطر 1.1 سم اور 2.3 سم ہوں اور ان کے مرکزوں میں 4.5 سم کا فاصلہ ہو ان دائروں کے مستقیم مشترک خط مماس کھینچو۔

3 دو مساوی دائرے کھینچو۔ جن میں سے ہر ایک کا نصف قطر 1.5″ ہو اور جن کے مرکزوں کے درمیان 2.5″ کا فاصلہ ہو۔ ان کے دو مستقیم مشترک خطِ مماس کھینچو اور ان میں سے ہر ایک کا طول بتاؤ۔

4 دو دائرے کھینچو۔ جن کے نصف قطر .8″ اور 1.6″ ہوں اور جن کے مرکزوں کے درمیان 2.8″ کا فاصلہ ہو۔ ان کے دو مستقیم مشترک خطِ مماس کھینچو اور ان کے طول ناپو۔ نیز حساب لگا کر جواب کی پڑتال کرو۔

5 دو دائروں کے نصف قطر 3″ اور 2″ ہیں اور ان کے مرکزوں کے درمیان کا 6″ کا فاصلہ ہے۔ ان کے مستقیم مشترک خطِ مماس کا طول بتاؤ۔

6 دو دائروں کے مرکزوں میں 2.5″ کا فاصلہ ہے۔ ان کے نصف قطر 1.3″، 1.7″ ہیں۔ ان دائروں کے تمام مشترک خطِ مماس کھینچو۔

7 ثابت کرو کہ مُشترک مماس مرکزی خط کو ایک ہی نُقطے پر ملتے ہیں ؎

8 دو دائروں کے مرکز 5گ کے فاصلے پر ہیں اور ان کے نصف قُطر 3گ اور اگ ہیں۔ ان کے معکوس مُشترک خطِ مماس کھینچو اور ان کا طُول معلوم کرو ؎

9 دو دائروں کے نصف قُطر اگ اور 1.5گ ہیں اور ان کے مرکزوں میں 3.5گ کا فاصلہ ہے ان کے معکوس مُشترک خطِ مماس کھینچو۔ ان کے طُول ناپو۔ نیز شمار سے جواب کی پڑتال کرو ؎

10 دو دیے ہوئے دائرے ایک دُوسرے کو نُقطہ ل پر بیرُونی طور پر مس کرتے ہیں۔ ایک خطِ مستقیم مُشترک خطِ مماس ان کو نُقاطِ ف، ق پر مس کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ اگر ف ق کو قطر مان کر دائرہ کھینچا جائے تو خطِ مرکزی اس کو نقطہ ل پر مس کرتا ہے ؎

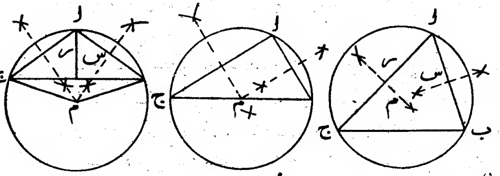
11 دو دائرے کھینچو۔ جن کے نصف قُطر 2.5 سم اور 4 سم ہیں۔ اور جن کا مرکزی فاصلہ 8 سم ہے۔ ایک خطِ مُستقیم مماس مُشترک کھینچو اور اس کو بڑھاؤ تا آنکہ وُہ مرکزی خط کو کاٹے۔ نقطۂ تقاطع کا فاصلہ دونوں مرکزوں سے معلُوم کرو۔ اور دونوں فاصلوں کی کسری نسبت لکھو ؎

12 دو دائروں کے مُشترک مستقیم مماسوں کے نقطۂ تقاطُع سے دونوں دائروں کے مرکزوں کے فاصلے کی نسبت وہی ہوتی ہے جو دونوں مشترک معکوس مماسوں کے نقطۂ تقاطُع سے دونوں دائروں کے مرکزوں کے فاصلوں میں ہے۔ ان میں سے ہر ایک نسبت دونوں دائروں کے نصف قُطروں کی نسبت کے برابر ہے ؎

مسئلہ 85

(عملی)

دیے ہوئے مثلث پر دائرۂ محیط بنانا ۔



شکل ع1   شکل ع2   شکل ع3

معلوم	دیا ہوا مثلث ا ب ج ۔
مطلوب	دائرہ کھینچنا ہے جو ا، ب، ج میں سے گزرے ۔
عمل	اب ، اج کے عمودی ناصف کھینچو جو نقطہ م پر ملیں م مطلوبہ دائرے کا مرکز ہوگا ۔ م کو مرکز مان کر م ا کی دوری سے دائرہ کھینچو یہ دائرہ ا، ب، ج میں سے گزرے گا ۔
ثبوت	چونکہ م خط اب کے عمودی ناصف پر ہے ۔ لہٰذا م ا = م ب اسی طرح م خط اج کے عمودی ناصف پر ہے ۔ لہٰذا م ا = م ج پس م ا = م ب = م ج پس دائرہ ا، ب، ج میں سے گزرتا ہے ۔ (فہو المطلوب)

نوٹ (۱) پہلی شکل ظاہر کرتی ہے کہ حادۃ الزّوایا مثلّث کا مرکزِ محیط △ کے اندر واقع ہوتا ہے دوسری شکل ظاہر کرتی ہے کہ قائم الزّاویہ △ کا مرکزِ محیط وتر پر واقع ہوتا ہے تیسری شکل ظاہر کرتی ہے کہ △ منفرجۃ الزّاویہ کا مرکزِ محیط △ کے باہر واقع ہوتا ہے۔

(2) اگر مثلّث کے اضلاع کا طول طا، طب، طج ہو اور △ سے مراد اُس کا رقبہ اور ر سے مراد اُس کا محیطی نصف قطر تو

$$ر = \frac{طا \times طب \times طج}{4\,\triangle}$$ (ثبوت کے لیے ضمیمہ دیکھو)

مشق 85

1 مثلّث بناؤ۔ جس کے اضلاع 2.5، 6، 6.5 سم ہوں مثلّث کا دائرۂ محیط کھینچو۔ اُس کا مرکز معلوم کرو اور نصف قطر کی لمبائی ناپو۔

2 مثلّث بناؤ۔ جس کے اضلاع $\overline{اب}$، $\overline{بج}$ علی الترتیب 2ً اور 2.5ً ہوں۔ اور زاویہ ب̂ = 120° ، مثلّث اب ج کا دائرۂ محیط کھینچو اور اُس کا نصف قطر بناؤ۔

3 اب ج د چوکور ہے۔ جس میں ا̂ + ج̂ = 180° ، اُس کا دائرۂ محیط کھینچو۔

4 ثابت کرو کہ △ کے ضلعوں کے عمودی ناصف مرکزِ محیط پر ملتے ہیں۔

5 ایک متساوی الاضلاع مثلّث کا ضلع 2ً ہے۔ اُس کا دائرۂ محیط کھینچو۔

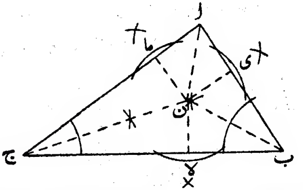
6 ایک مثلّث کے اضلاع 3ً، 4ً اور 5ً ہیں اس کا محیطی نصف قطر معلوم کرو۔

7 ایک مثلّث بناؤ۔ جس کے اضلاع 1.3ً، 1.4ً اور 1.5ً ہوں۔ اُس کا دائرۂ محیط کھینچو اور اُس کا نصف قطر بروئے حساب اور بروئے پیمائش معلوم کرو۔

مسئلہ 86

(عملی)

دیے ہوئے مثلّث کے اندر دائرہ بنانا ۔



معلوم	دیا ہُوا مثلّث ا ب ج ۔
مطلوب	ا ب ج کے اندر دائرہ بنانا ۔
عمل	(۱) بؔ اور جؔ کے ناصف کھینچو جو نقطہ ن پر ملیں ۔ (2) ن سے ب ج پر ن لا عموداً کھینچو ۔ (3) ن کو مرکز مان کر ن لا کی دُوری سے دائرہ کھینچو۔ یہی مطلوبہ دائرہ ہوگا ۔
ثبوت	ن ما اور ن ی خطوط ج ا ، ا ب پر عمود کھینچو ۔ چونکہ ن زاویہ بؔ کے ناصف پر واقع ہے لہٰذا ن لا = ن ی ۔ پھر چونکہ ن زاویہ جؔ کے ناصف پر واقع ہے لہٰذا ن لا = ن ما ۔ پس ن لا = ن ما = ن ی اس لیے جو دائرہ ہم نے بنایا ہے وُہ لا ، ما ، ن سے گزرتا ہے ۔ نیز لا ، ما ، ی پر کے سب زاویے قائمہ ہیں ∴ ب ج ، ج ا ، ا ب اس دائرے کو مس کرتے ہیں ۔ پس ○ لا ما ی △ اندرونی دائرہ ہے ۔ (فھو المطلوب)

نوٹ : اگر ص سے مُراد مثلّث کا نصف احاطہ ہو (یعنی اس کے اضلاع کے مجموعے کا نصف)
△ سے مُراد اُس کا رقبہ اور ر سے مُراد اندرُونی نصف قُطر تو

ر = △/ص . (ثبوت کے لیے دیکھو ضمیمہ)

مشق 86

1 مثلّث بناؤ جس کے اضلاع 6، 7، 8 سم ہوں۔ مثلّث کا اندرُونی دائرہ بناؤ اور اُس کا نصف قطر ناپو۔

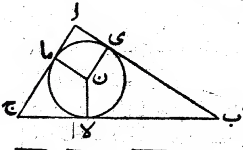
2 مثلّث بناؤ جس کے اضلاع "2.6، "2.8، "3 ہیں۔ اس کا اندرُونی نصف قطر ناپو۔

3 مثلّث کے ضلعے "1.3، "1.4 اور "1.5 ہیں۔ اُس کا اندرُونی نصف قطر معلوم کرو۔

4 مسئلہ 86 کی شکل میں ثابت کرو کہ
(ا) ا ما + ج لا + ب ی = ا ی + ب لا + ج ما = ص
(اا) ا ما = ا ی = ص – ط ا، ب لا = ب ی = ص – ط ب
ج لا = ج ما = ص – ط ج جہاں ص سے مُراد نصف احاطہ ہے۔

5 (۱) کسی مُعیّن کے اندر دائرہ بناؤ (2) کسی مُربّع کے اندر دائرہ بناؤ۔

6 ثابت کرو کہ قائم الزّاویہ △ میں وتر اور اندرُونی دائرے کے قطر کا مجموعہ باقی اضلاع کے مجموعے کے برابر ہوتا ہے۔



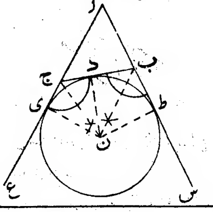
ثبوت : ا ما = ا ی
ب ی = ب لا، ج لا
= ج ما
کیونکہ بیرُونی نقطے سے دائرے کے مماس مُساوی ہوتے ہیں

پس ب ج = ب لا + لا ج = ب ی + ج ما = ب ا + ج ا – 2 ا ما
= ب ا + ج ا – 2 ر (∵ ن ی ا ما مُربّع ہے)
پس ب ج + 2 ر = ب ا + ج ا

مسئلہ 87

(عملی)

دیے ہوئے مثلّث کا خارجی دائرہ بنانا۔



معلوم	دیا ہوا مثلّث ا ب ج ۔
مطلوب	دائرہ بنانا ہے جو ب ج کو اور ا ب، ا ج کے بڑھے ہوئے حصّوں کو مس کرے ۔
عمل	(1) ا ب، ا ج کو س، غ تک بڑھاؤ ۔ (2) س ب ج، غ ج ب کے ناصف کھینچو جو نقطہ ن پر ملیں ۔ (3) ن سے ب ج پر ن د عمود کھینچو ۔ (4) ن کو مرکز مان کر ن د کی دُوری سے دائرہ کھینچو ۔ یہی مطلوبہ خارجی دائرہ ہوگا ۔
ثبوت	ن سے ن ط اور ن ی خطوط ا ب، ا ج پر عمود کھینچو ۔ ∵ ن زاویہ س ب ج کے ناصف پر واقع ہے لہٰذا ن د = ن ط ۔ پھر ن زاویہ ب ج غ کے ناصف پر واقع ہے ۔ لہٰذا ن د = ن ی ∴ ن د = ن ط = ن ی نیز د، ط، ی پر کے سب زاویے قائمہ ہیں ۔ ∴ ب ج اور ا ب اور ا ج کے بڑھے ہوئے حصّے دائرے کو مس کرتے ہیں ۔ پس ⊙ ط د ی △ ا ب ج کا خارجی دائرہ ہے ۔ (فہوالمطلوب)

خارجی دائرے کا نصف قطر معلوم کرنا۔ اگر ص سے مراد نصف مجموعۃ الاضلاع △ سے مراد اس کا رقبہ ہو اور $\overline{\text{بج}}$ = طا، $\overline{\text{اج}}$ = طب اور $\overline{\text{اب}}$ = طج تو

$$\text{ن}_{\text{ا}} = \frac{\triangle}{\text{ص}-\text{طا}}\ ،\ \text{ن}_{2} = \frac{\triangle}{\text{ص}-\text{طب}}\ \text{اور}\ \text{ن}_{3} = \frac{\triangle}{\text{ص}-\text{طج}}$$

مشق 87

1 تین ایسے خطوط کو مس کرتا ہوا ایک دائرہ کھینچو جو نہ ہم نقطہ ہوں اور نہ متوازی۔

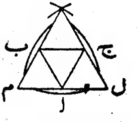
2 مثلث بناؤ جس کے اضلاع 3 سم، 3.5 سم اور 5 سم ہوں △ کے اندرونی اور اور خارجی دائرے بناؤ اور بروئے حساب اور بروئے پیمائش ان چاروں دائروں کے نصف قطر معلوم کرو۔

3 متساوی الاضلاع △ بناؤ جس کا ہر ضلع 3گ ہو اس کا اندرونی دائرہ اور ایک خارجی دائرہ بناؤ۔ اور بروئے پیمائش ان کے نصف قطر اور ان کا باہمی مرکزی فاصلہ معلوم کرو۔

4 دو دائرے کھینچو جن کے نصف قطر 1.2گ اور .5گ ہیں اور ان کے محیطوں میں اقل ترین فاصلہ .2گ ہے اور ہر دائرہ دوسرے سے باہر واقع ہے نیز وہ △ بناؤ جس کے یہ اندرونی اور خارجی دائرے ہیں۔ مثلث کے اضلاع ناپو۔

5 اگر △ کے دو اضلاع بڑھائے جائیں تو ثابت کرو کہ دو خارجی زاویوں اور تیسرے اندرونی زاویے کے ناصف خارجی مرکز پر ملیں گے۔

6 ثابت کرو کہ دو خارجی مرکزوں کو ملانے والا خط مثلث کے ایک کونے میں سے گزرتا ہے۔



7 وہ مثلث بناؤ جس کے دو دو خارجی مرکزوں کا باہمی فاصلہ 2.5 سم، 2.5 سم اور 2.8 سم ہے۔

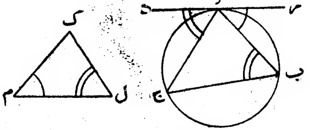
[اشارہ: دی ہوئی لمبائیوں سے بنی ہوئی تکون کی پائینی تکون مطلوب ہے]

8 ایک △ کا احاطہ = 3گ، راسی زاویہ $\hat{\text{ا}}$ = 60° اور راسی زاویے کا ناصف $\overline{\text{اط}}$ = 1گ ہے۔ مثلث بناؤ۔

مسئلہ 88

(عملی) حصۂ اوّل

دیے ہوئے دائرے کے اندر ایک مثلّث بنانا جو ایک دیے ہوئے مثلّث کا مُتساوی الزّوایا ہو ؀

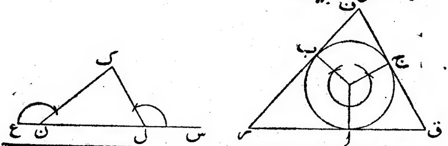


معلوم	دیا ہُوا دائرہ ا ب ج اور مثلّث ک ل م ؀
مطلوب	دائرے میں ایسا △ بنانا جو △ ک ل م کا مُتساوی الزّوایا ہو ؀
عمل	(۱) مُحیط پر کوئی نُقطہ ا لو ؀ (۲) ا پر دائرے کا مماس د ا ر کھینچو ؀ (۳) ا پر د ا ج = ل اور ر ا ب = م بناؤ ؀ (۴) اگر ا ب اور ا ج دائرے کو نقاط ب، ج پر ملیں تو ب ج کو ملاؤ ؀ ا ب ج مطلوبہ △ ہوگا ؀
ثبوت	ر ا ب = م (بروئے عمل) لیکن ر ا ب = ج (مُتبادل قطعے کا زاویہ) پس م = ج اسی طرح ل = ب اس لیے تیسرا زاویہ ک = ا لہٰذا △ ا ب ج مطلوبہ △ ہے جو △ ک ل م کا مُتساوی الزّوایا ہے ؀ (فھو المطلوب)

مسئلہ 88

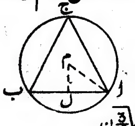
(عملی) حصۂ دوم

دیے ہوئے دائرے کے گرد ایک مثلّث بنانا جو کسی دیے ہوئے مثلّث کا مُتساوی الزّوایا ہو۔



معلُوم	دیا ہُوا دائرہ ا ب ج اور مثلّث ک ل ن ۔
مطلُوب	⊙ ا ب ج کے گرد △ بنانا جو △ ک ل ن کا مُتساوی الزّوایا ہو ۔
عمل	(1) ن ل کو دونوں طرف نقاط س ، ع تک بڑھاؤ ۔ (2) دائرہ ا ب ج کا مرکز م معلُوم کرو اور کوئی نصف قُطر م ا لو ۔ (3) م پر ا م ب = ک ن ع اور ا م ج = ک ل س بناؤ۔ جہاں م ب = م ج = م ا (4) ا ، ب ، ج سے خطوط ق ا ر ، ر ب ف ، ف ج ق کھینچو۔ جو علی التّرتیب م ا ، م ب ، م ج پر عمُود ہوں ۔ (5) ف ق ر مطلُوبہ مثلّث ہوگا ۔
ثبوت	شکل ا م ب ر میں ا ، ب قائمہ ہیں ∴ ر تتمّہ ہے ا م ب کا مگر ک ن ل تتمّہ ہے ک ن ع کا اور ا م ب = ک ن ع (عمل) پس ر = ک ن ل اِسی طرح ق = ک ل ن اور ف = ل ک ن پس △ ف ق ر مُتساوی الزّوایا ہے △ ک ل ن کا نیز ق ر عمُود ہے ا م پر ∴ یہ دائرے کا مماس ہے اِسی طرح ر ف ، ف ق بھی دائرے کے مماس ہیں ۔ پس ف ق ر مطلُوبہ △ ہے ۔ (فہوالمطلُوب)

دائرے کے اندر بنے ہُوئے مثلّث متساوی الاضلاع کے ضلعے کا طُول معلوم کرنا۔



م مرکز سے $\overline{\text{مل}}$ ⊥ $\overline{\text{اب}}$ پر گراؤ۔

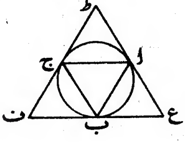
∵ م ل ا △ قائم الزّاویہ میں م $\hat{\text{ا}}$ ل $= 30^\circ$

∴ $\overline{\text{مل}} = \frac{1}{2}$ م ا $= \frac{1}{2}$ نصف قُطر (فرضاً نصف قُطر = ن)

∴ $\overline{\text{ال}} = \sqrt{\text{ام}^2 - \text{مل}^2} = \sqrt{\text{ن}^2 - (\frac{\text{ن}}{2})^2} = \sqrt{\frac{3}{2}}$ ن

پس $\overline{\text{اب}} = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$ ن $= \sqrt{3} \times$ ن

دائرے کے باہر گرداگرد بنے ہُوئے مثلّث متساوی الاضلاع کے ضلع کا طُول معلوم کرنا۔



∵ $\overline{\text{طع}} = 2\,\overline{\text{بج}} = 2$ ن $\times \sqrt{3}$

پس بیرُونی متساوی الاضلاع △ کا ضلع $= 2$ ن $\times \sqrt{3}$

مشق 88

1 دائرے میں جس کا قُطر 2 گ ہے۔ متساوی الاضلاع مثلّث بناؤ ۔

2 دائرے میں جس کا نصف قُطر 5 سم ہے ایک مثلّث بناؤ۔ جس کے دو زاویے 40°، 80° کے ہوں اور اس کے سب سے لمبے ضلعے کو ناپو۔

3 دائرہ بناؤ۔ جس کا نصف قطر 2 گ ہو۔ دائرے کے اندر مثلّث بناؤ۔ جس کے دو زاویے 45°، 60° کے ہوں۔ اِن زاویوں کے مُقابل کے اضلاع کا طُول ناپو۔ اور بذریعۂ اعمالِ حسابیّہ پڑتال کرو ۔

4 دائرے میں جس کا نصف قطر 5 سم ہے۔ مثلّث بناؤ۔ جس کے زاویے 30°، 80°، 70° کے ہوں۔ اس △ کے اضلاع ناپو اور پڑتال کرو ۔

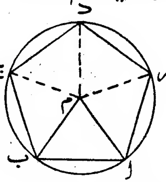
5 دائرے کے گرد جس کا نصف قُطر 2 سم ہے۔ ایک △ بناؤ۔ جس کے زاویے 30°، 60°، 90° کے ہوں۔ سب سے بڑے ضلعے کی پیمائش لکھو اور پڑتال کرو ۔

6 دِیے ہُوئے دائرے کے گرد ایک متساوی الاضلاع △ بناؤ اور ثابت کرو کہ اُس کا رقبہ اُس △ کے رقبے سے چوگنا ہے۔ جو دائرے کے اندر بنائی جائے ۔

مسئلہ 89

(عملی) حصۂ اوّل

دیے ہوئے دائرے میں ایک مُنتظم کثیرُالاضلاع بنانا جس کے ضلعوں کی تعداد ن ہو ۔

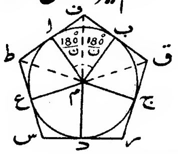


معلوم	دیا ہُوا دائرہ جس کا مرکز م ہے ۔
مطلوب	دائرے میں ایک کثیرُالاضلاع بنانا جو مُنتظم ہو اور جس کے اضلاع کی تعداد ن ہو ۔
عمل	(۱) مرکز پر زاویہ ا م ب = $\frac{360}{ن}$ بناؤ ۔ تب ا ب مطلوبہ کثیرُالاضلاع کا ایک ضلع ہوگا ۔ (2) ا ب کے برابر قوس ب ج ، ج د ، د س .... کاٹو ۔ (3) ب ج ، ج د ، د س .... کو ملاؤ ۔ تب ا ب ج د س ... مطلوبہ مُنتظم کثیرُالاضلاع ہوگا ۔
ثبوت	چونکہ قوس ا ب = قوس ب ج = قوس ج د .... پس وتر ا ب = وتر ب ج = وتر ج د ...... لہٰذا ا ب ج د س مُتساوی الاضلاع ہے ۔ اب قوس ا ب ج = قوس ب ج د ۔ (ا ب = ج د) پس ان قوسوں کے زاویے ا ب ج اور ب ج د برابر ہیں ۔ اسی طرح تمام کونوں کے زاویے برابر ہیں ۔ اور ا ب ج د س مُتساوی الزوایا ہے ۔ پس ا ب ج د س مطلوبہ کثیرُالاضلاع ہے جو دائرے کے اندر بنایا گیا ہے ۔

مسئلہ 89

(عملی) حصۂ دوم

دیے ہوئے دائرے کے گرد منتظم کثیر الاضلاع بنانا جس کے ضلعوں کی تعداد ن ہو۔



معلوم	دیا ہوا دائرہ جس کا مرکز م ہے ۔
مطلوب	دائرے کے گرد منتظم کثیر الاضلاع بنانا ہے۔ جس کے ضلعوں کی تعداد ن ہو ۔
عمل	(1) مرکز پر زاویہ ا م ب $= \frac{360^{\circ}}{\text{ن}}$ بناؤ (2) قوس ا ب کے برابر قوس ب ج، ج د، د ع کاٹو (3) م ا، م ب، م ج وغیرہ کو ملاؤ ۔ (4) ط ا ف، ف ب ق، ق ج ر وغیرہ م ا، م ب، م ج پر عمود اً کھینچو ف ق ر س ط مطلوبہ کثیر الاضلاع ہوگا ۔
ثبوت	(1) قوس ا ب، ب ج، ج د وغیرہ مساوی ہیں ۔ ∴ مرکزی زاویے ا م ب، ب م ج، ج م د وغیرہ مساوی ہیں ۔ ∴ ان کے تتمہ زاویے ف، ق، ر وغیرہ سب مساوی ہیں ∴ شکل متساوی الزوایا ہے (2) ∵ ف م، ق م وغیرہ مرکزی زاویوں کے ناصف ہیں ∴ ا م ف = ف م ب = ب م ق = ق م ج = ... = $\frac{180^{\circ}}{\text{ن}}$ نیز ا، ب، ج پر قائمہ زاویے بنتے ہیں ∴ △ ا م ف، ف م ب، ب م ق، ق م ج وغیرہ میں دو زاویے اور ایک ضلع مساوی ہیں۔ پس یہ سب منطبق ہیں ۔ لہٰذا ا ف = ف ب = ب ق = ق ج = ج ر ..... پس ف ق = ق ر = ر س اور شکل متساوی الاضلاع ہے ۔ (3) ف ق، ق ر، ر س نصف قطروں پر عمود ہیں ∴ سب مماس ہیں پس ف ق ر س ط منتظم کثیر الاضلاع ہے جو دائرے کے گرد بنایا گیا ہے ۔ (فہو المطلوب)

نوٹ: زاویہ ا م ب ($\frac{360°}{ن}$) کی مقدار متساوی الاضلاع مثلث میں 120° - مربع میں 90° - منتظم مسدس میں 60° - منتظم مثمن میں 45° اور منتظم ذو اثنا عشر میں 30° ہو گی۔

مشق 89

1 دیے ہوئے دائرے میں متساوی الاضلاع مثلث بناؤ۔

2 دیے ہوئے دائرے میں مربع بناؤ۔

3 دیے ہوئے دائرے میں منتظم مسدس بناؤ۔

4 دیے ہوئے دائرے میں 〃 مثمن بناؤ۔

5 دیے ہوئے دائرے میں 〃 ذو اثنا عشر (12 ضلعی) شکل بناؤ۔

6 3 سم نصف قطر کا دائرہ کھینچو اور دو منتظم مسدس بناؤ - ایک دائرے کے اندر اور ایک باہر۔

7 دیے ہوئے دائرے میں ایک متساوی الاضلاع مثلث اور منتظم مسدس بنائے گئے ہیں - اگر طا اور طب ان کے اضلاع کے طول ہوں تو ثابت کرو کہ $طا^2 = 3 طب^2$ ۔

8 ایک دائرے میں جس کا نصف قطر ر ہے ایک منتظم مثمن اور ایک مربع بنائے گئے ہیں - اگر ان کے اضلاع کے طول اَ اور بَ ہوں تو ثابت کرو کہ $بَ^2 = اَ^2 (2 + \sqrt{2}) = 2ر^2$ ۔

9 دائرے کے گرد مندرجہ ذیل شکلیں بناؤ:-

(1) متساوی الاضلاع مثلث (2) مربع

(3) منتظم مسدس (4) منتظم مثمن

(5) منتظم اثنا عشر

10 عملی طور پر ثابت کرو کہ ایک دائرے کے اندر بنے ہوئے مسدس منتظم کا رقبہ اسی دائرے کے اندر بنے ہوئے مثلث کے رقبے سے دو چند ہوتا ہے۔

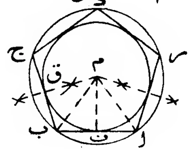
11 عملی طور پر ثابت کرو کہ ایک دائرے کے باہر بنے ہوئے مسدس منتظم کا رقبہ اسی دائرے کے گرد بنے ہوئے متساوی الاضلاع مثلث کے رقبے کا $\frac{2}{3}$ ہوتا ہے۔

مسئلہ 90

(عملی)

(1) دِیے ہُوئے مُنتظم کثیرُالاضلاع کے اندر دائرہ بنانا ۔

(2) دِیے ہُوئے مُنتظم کثیرُالاضلاع کے گرد دائرہ بنانا ۔



معلُوم	دِیا ہُوا مُنتظم کثیرُالاضلاع ا ب ج د س ۔
مطلُوب	(1) شکل مذکور کے اندر دائرہ بنانا ۔ (2) 〃 〃 گرد 〃 〃 ۔
عمل	زوایائے ا ، ب کے ناصِف ا م ، ب م کھینچو جو نقطہ م پر مِلیں ۔ م سے ا ب ، ب ج پر عمُود م ف ، م ق کھینچو ۔ (1) م کو مرکز مان کر م ف کی دُوری سے دائرہ کھینچو یہ اَندرُونی دائرہ ہوگا ۔ (2) م کو مرکز مان کر م ا کی دُوری سے دائرہ کھینچو یہ بیرُونی دائرہ ہوگا ۔
ثبُوت	(1) ب م ، ب کا ناصِف ہے ∴ م ف = م ق اسی طرح م سے تمام اضلاع کے عمُود مُساوی ہوں گے ۔ نیز ف ، ق وغیرہ پر قائمہ زاویے بنتے ہیں ∴ وہ دائرہ جِس کا مرکز م ہے اور نِصف قطر م ف ہے تمام ضِلعوں کو اندرُونی طور پر مس کرے گا ۔ (2) پھر ا = ب ∴ اِن کے نِصف م ا ب اور م ب ا مُساوی ہیں ۔ پس △ م ا ب میں دو زاویے برابر ہیں ∴ م ا = م ب اِسی طرح م ج = م د = ... م ا پس دائرہ جِس کا مرکز م اور نِصف قطر م ا ہے ۔ ب ، ج ، د وغیرہ میں سے گزرے گا یہی بیرُونی یا دائرۂ محیط ہے ۔ (فہوَ المطلُوب)

مشق 90

1 دیے ہُوئے مُربّع کے گرد دائرہ بناؤ ۔

2 3 سم قاعدے پر منتظم مُسدّس بناؤ اور اُس کے اندر دائرہ کھینچو ۔

3 مُعیّن بناؤ۔ جس کا ہر ضلع 7 سم اور ایک وتر 5 سم ہو۔ مُعیّن کے اندر دائرہ کھینچو اور اُس کے نصف قطر کو ناپو ۔

4 مُعیّن بناؤ۔ جس کے وتر 9 سم اور 6 سم ہوں۔ اُس کے اندر دائرہ بناؤ اور اُس کا نصف قطر ناپو ۔

5 بتاؤ کیوں ناممکن ہے کہ:-

(i) دائرے کے اندر کوئی مُعیّن بنایا جاسکے ؟

(ii) دائرے کے اندر کوئی اا ع بنایا جاسکے۔ سوا مُربّع مُستطیل اور ذُوزنقہ کے ؟

6 دائرے کا مرکز م ہے اور اُس کے اندر منتظم مخمّس ا ب ج د س بنایا گیا ہے۔ م سے ج د پر عمُود م ل کھینچا گیا ہے اور م ا کو ملایا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ ا م ل خطِ مُستقیم ہے ۔

7 2 . ا قاعدے پر ایک مُسدّس بناؤ۔ اس کے باہر اور اندر دو دائرے کھینچو۔ اور اِن دائروں کے نصف قطروں میں نسبت معلوم کرو ۔

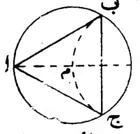
8 ایک مُربّع بناؤ۔ جس کا ضلع ا ہو۔ اس کے اندر اور باہر ایک ایک دائرہ کھینچو اور اُن کے نصف قطروں کی باہمی نسبت معلوم کرو ۔

9 ایک مثمّن منتظم معلوم کا ضلع ا ہے۔ اُس کے گرد اور اندر دائرے بناؤ۔ اُن کے نصف قطر ناپو۔ اور اعمالِ حسابیہ سے جواب کی پڑتال کرو ۔

مُنتظم شکلیں

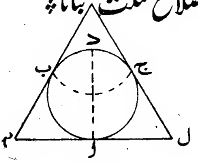
دائرے کے اندر یا باہر خاص خاص مُنتظم شکلیں کھینچنے کے قاعدے درج ذیل ہیں۔ شکلیں بناتے وقت طالب علم کو چاہیے کہ عمل کے تمام خطوط شکلوں میں ظاہر کرے:

1 دِیے ہُوئے دائرے میں مُتساوی الاضلاع مثلّث بنانا۔



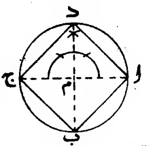
عمل: دائرے کا مرکز م معلوم کرو۔ اور کوئی قطر ا د کھینچو۔ د کو مرکز مان کر م ا کی دُوری سے دائرہ کھینچو جو پہلے دائرے کو ب، ج پر کاٹے۔ ا ب، ب ج، ا ج کو مِلاؤ ا ب ج مطلوبہ △ ہوگا۔

2 دِیے ہُوئے دائرے کے گرد مُتساوی الاضلاع مثلّث بنانا۔

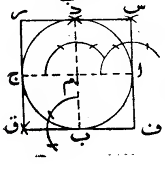


عمل: ا، ب، ج پہلے کی طرح معلوم کرو۔ ا، ب، ج پر مماس کھینچو۔ جو ک، ل، م پر ملیں۔
ک ل م مطلوبہ △ ہوگا۔

3 دِیے ہُوئے دائرے میں مُربّع کھینچنا۔



عمل: دائرے کا مرکز معلوم کرو۔ ا م ج اور ب م د دو قطر علی القوائم کھینچو۔ ا ب، ب ج، ج د، د ا کو مِلاؤ۔
ا ب ج د مطلوبہ مُربّع ہوگا۔

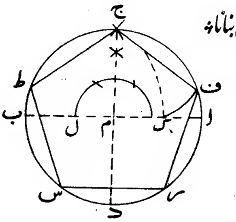


4 دِیے ہُوئے دائرے کے گرد ایک مُربّع بنانا۔

عمل: دائرے کا مرکز م معلوم کرو۔

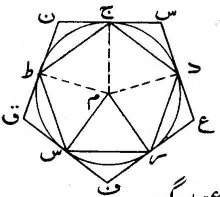
ا م ج، ب م د دو قطر علی القوائم کھینچو۔ ا، ب، ج، د سے خطوط م ا، م ب،
م ج، م د پر عمود س ا ف، ف ب ق، ق ج ر، ر د س کھینچو۔
ف ق ر س مطلوبہ مربع ہوگا ؃

5 دیے ہُوئے دائرے کے اندر منتظم مخمّس بنانا ؃



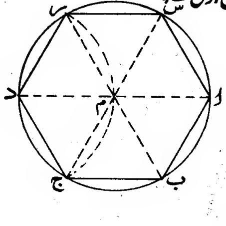
عمل: دو قطر ا ب، ج د علی القوائم بناؤ۔ جو مرکز م سے گزرتے ہیں۔ م ب کی تنصیف نقطہ ل پر کرو۔ ل کو مرکز مان کر ل ج کی دُوری سے قوس لگاؤ۔ جو م ا کو ک پر کاٹے۔ ج کو مرکز مان کر ج ک کی دُوری سے قوس کھینچو۔ جو دائرے کو نقطہ ط پر ملے۔ ج ط کو ملاؤ۔ یہ مخمّس کا ایک ضلع ہوگا ؃

6 دیے ہُوئے دائرے کے باہر منتظم مخمّس بنانا ؃



عمل: پارہ 5 کی طرح عمل کر کے دائرے کے اندر منتظم مخمّس ج د ر س ط بناؤ۔ نقاط ج، د، ر، س، ط پر مماس (نصف قطروں پر عمود) کھینچو۔ یہی مطلوبہ مخمّس کے اِضلاع ہوں گے ؃

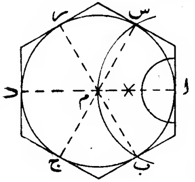
7 دیے ہُوئے دائرے کے اندر منتظم مسدّس بنانا ؃



عمل: دائرے کا مرکز م معلوم کرو اور کوئی قطر ا م د کھینچو۔ د کو مرکز مان کر د م کی دُوری سے دائرہ کھینچو جو دیے ہُوئے دائرے کو ر، ج پر ملے۔ ر م ج م کو ملاؤ اور اُن کو بڑھاؤ کہ دائرے کو

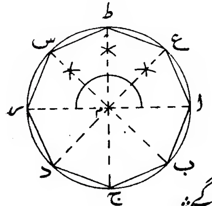
ب، س پر ملیں۔ اب، ب ج، ج د، د ر، ر س، س ا کو ملاؤ۔
ا ب ج د ر س مطلوبہ مُسدّس ہوگا۔

8 دیے ہوئے دائرے کے گرد منتظم مُسدّس بنانا۔



عمل: پارہ 7 کی طرح عمل کرو۔ نقاط ا، ب، ج، د، ر، س پر خطوط کھینچو جو م ا، م ب، م ج، م د، م ر، م س پر عمود ہیں یہ منتظم مُسدّس مطلوب کے اضلاع ہوں گے۔

9 دیے ہوئے دائرے کے اندر منتظم مُثمّن بنانا۔



عمل: دائرے کے اندر دو قطر ا م ر، ج م ط علی القوائم کھینچو۔ ا م ج، ج م ر کی تنصیف خطوط ب م س، د م ع سے کرو۔ جو دائرے کو ب، س، د، ع پر کاٹیں۔ تب ا، ب، ج، د، ر، س، ط، ع مطلوبہ مُثمّن کے راسی نقاط ہوں گے۔

10 دیے ہوئے دائرے کے گرد منتظم مُثمّن بنانا۔

عمل: پارہ 9 کی طرح نقاط ا، ب، ج، د، ر، س، ط، ع معلوم کرو۔ ان نقاط میں سے م ا، م ب، م ج وغیرہ پر عمود نکالو۔ یہی مطلوبہ بیرونی مُثمّن کے اضلاع ہوں گے۔

11 دیے ہوئے دائرے کے اندر منتظم معشّر بنانا۔

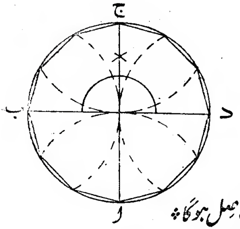
عمل: پارہ 5 کی طرح عمل کرو۔ قوس ج ف، ف ر، ر س، س ط، ط ج کی تنصیف کرو۔ نقاطِ تنصیف اور ج، ف، ر، س، ط مطلوبہ معشّر

کے کونے ہوں گے ؛

12 دیے ہوئے دائرے کے گرد مُنتظم مُعشّر بنانا ؛

عمل : پارہ 11 کی طرح دائرے پر اندرونی مُخمّس کے کونے قائم کرو۔ ان کونوں سے دائرے کے مماس کھینچو (ایسے خطوط کھینچو جو نصف قطروں پر عمود ہوں) یہی مطلوبہ مُعشّر کے اضلاع ہوں گے ؛

13 دیے ہوئے دائرے کے اندر مُنتظم ذو اثنا عشر بنانا ؛



عمل : دو قطر ا ج ، ب د علی القوائم کھینچو۔ ا ، ب ، ج ، د کو مرکز مان کر اور نصف قطر کی دوری سے قوس کھینچو جو مرکز سے گزر کر محیط کو قطع کریں۔ نقاطِ تقاطع کو ملاؤ۔ مطلوبہ ذو اثنا عشر حاصل ہوگا ؛

14 دیے ہوئے دائروں کے گرد مُنتظم ذو اثنا عشر بنانا ؛

عمل : پارہ 13 کی طرح اندرونی ذو اثنا عشر کے کونے معلوم کرو۔ ان کونوں پر مماس کھینچو۔ جن سے مطلوبہ ذو اثنا عشر حاصل ہوگا ؛

دائرے کا مُحیط اور رَقبہ

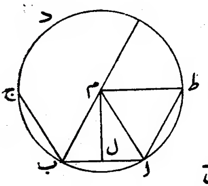
1 مُحیط - کوئی دائرہ لو۔ اُس کے مُحیط اور قُطر کی پیمائش کرو۔
کئی مدوّر چیزوں پر تجربہ کرنے سے معلوم ہوگا کہ مُحیط کا طُول قُطر سے تقریباً $3\frac{1}{7}$ گنا ہے۔

بہ الفاظ دیگر $\dfrac{\text{مُحیط}}{\text{قطر}} = \dfrac{22}{7}$

زیادہ صحت کے ساتھ یہ نسبت 3.14159 یا $\frac{355}{113}$ دریافت ہُوئی ہے۔ ہر مُحیط اور قُطر کے درمیان یہی نسبت پائی جاتی ہے۔ اُسے یونانی حرف π سے تعبیر کیا جاتا ہے۔

اگر دائرے کا نصف قُطر ر ہو تو $\dfrac{\text{مُحیط}}{\text{قطر}} = \pi$ یعنی $\dfrac{\text{مُحیط}}{2\,\text{ر}} = \pi$

پس مُحیط $= \pi \times$ قُطر $= 2\pi \times$ ر



2 رقبہ - کوئی دائرہ اب ج د لو جس کا مرکز م اور نصف قُطر ر ہے۔ مُحیط کو "ن" مُساوی حصّوں اب، ب ج، ج د وغیرہ میں تقسیم کرو۔ اَب کو مِلاؤ۔ م سے م ل خط اَب پر عمُود نکالو۔

△ اب م کا رقبہ $= \frac{1}{2}$ م ل × $\overline{\text{اب}}$

لیکن دائرے کے اندر ایسے "ن" △ ہیں

∴ مُنتظم اب ج د ...... کا رقبہ = ن × $\frac{1}{2}$ × م ل × $\overline{\text{اب}}$

اب اگر ن کی قیمت اتنی بڑھائیں کہ وُہ لامتناہی ہو جائے تو اس کا نتیجہ یہ ہوگا کہ ضلع اب بے حد چھوٹا ہو کر قوس اب کے مُساوی ہو جائے گا اور ن × $\overline{\text{اب}}$ مُحیط کے برابر ہو جائے گا۔ نیز م ل تقریباً ر کے مُساوی ہو جائے گا۔

پس مُنتظم کا رقبہ $= \frac{1}{2}$ × م ل × ن × $\overline{\text{اب}}$ $= \frac{1}{2}$ × ر × مُحیط

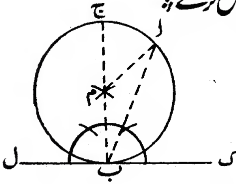
$= \frac{1}{2}$ × ر × 2π ر $= \pi \times$ ر^2

اب مُنتظم اور دائرہ مُساوی الرّقبہ ہیں۔ اِس لیے

دائرے کا رقبہ $= \pi \times$ ر^2

بعض مسلّماتِ معلومہ سے دائرے بنانا

1 دائرہ بنانا جو کسی دِیے ہُوئے نُقطے میں سے گزرے اور کسی دِیے ہُوئے خط کو دِیے ہُوئے نُقطے پر مس کرے۔

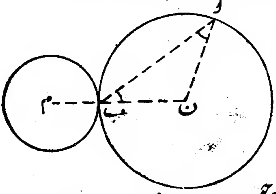


امورِ معلومہ: فرض کرو خط ک ل اور اُس میں ایک نقطہ ب دیا ہُوا ہے اور ا کوئی نقطہ خط سے باہر ہے

مطلوب: دائرہ بنانا ہے۔ جو ا میں سے گزرے اور ک ل کو نقطہ ب پر مس کرے۔

عمل: نقطہ ب سے ب ج کھینچو جو ک ل پر عمود ہو۔
ا ب کو ملاؤ۔ زاویہ ب ا م زاویہ ا ب ج کے مساوی بناؤ۔
اگر ا م خط ب ج کو م پر کاٹے تو م کو مرکز مان کر نصف قطر م ب سے دائرہ کھینچو۔
یہی مطلوبہ دائرہ ہوگا۔

2 دائرہ بنانا جو کسی دِیے ہُوئے نُقطے میں سے گزرے اور کسی دِیے ہُوئے دائرے کو دِیے ہُوئے نقطے پر مس کرے۔

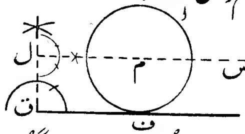


امورِ معلومہ: فرض کرو دیا ہُوا نقطہ ا ہے اور دیے ہُوئے دائرے کا مرکز م ہے۔ نیز دائرے پر کوئی نقطہ ب دیا ہُوا ہے۔

مطلوب: دائرہ بنانا ہے۔ جو ا میں سے گزرے اور دیے ہُوئے دائرے کو نقطہ ب پر مس کرے۔

عمل: ا ب کو ملاؤ۔ م ب کو ن تک بڑھاؤ۔ زاویہ ب ا ن زاویہ ا ب ن کے مساوی بناؤ۔
ن کو مرکز مان کر نصف قطر ب ن سے دائرہ کھینچو۔ یہی مطلوبہ دائرہ ہوگا۔

3 دائرہ بنانا جس کا نصف قطر معلوم ہو اور جو دیے ہوئے نقطے میں سے گزرے اور دیے ہوئے خطِ مستقیم کو مس کرے ؛

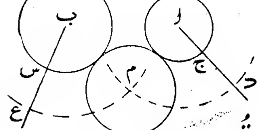


امورِ معلومہ : فرض کرو دیا ہوا نقطہ ر دیا ہوا خطِ مستقیم ف ق اور دیا ہوا نصف قطر سر ہے ۔

مطلوب : دائرہ بنانا ہے ۔ جس کا نصف قطر سر ہو ۔ جو ر میں سے گزرے اور ف ق کو مس کرے ۔

عمل : خط ل س کھینچو جو ف ق کے ‖ ہو ۔ اور اس سے سر فاصلے پر ہو ۔ ر کو مرکز مان کر سر کی دوری سے قوس کھینچو جو ل س کو م پر قطع کرے م کو مرکز مان کر م ر کی دوری سے دائرہ کھینچو ۔ یہی مطلوبہ دائرہ ہوگا ؛

4 دائرہ بنانا جس کا نصف قطر معلوم ہو اور جو دو دیے ہوئے دائروں کو بیرونی طور پر مس کرے ؛



امورِ معلومہ : فرض کرو دو دائرے دیے ہوئے ہیں ۔ جن کے مرکز ر . ب ہیں ۔ سر مطلوبہ ⊙ کا نصف قطر ہے ۔

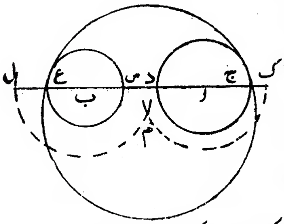
مطلوب : دائرہ بنانا جس کا نصف قطر سر ہو اور جو ⊙ ر ، ⊙ ب کو بیرونی طور پر مس کرے ۔

عمل : پہلے دائرے میں کوئی نصف قطر ر ج لو ۔ اس کو د تک بڑھاؤ ۔ تاکہ ج د برابر ہو سر کے ۔ دوسرے دائرے میں کوئی نصف قطر ب س لو ۔ اس کو ع تک بڑھاؤ تاکہ س ع برابر ہو سر کے ۔ ر کو مرکز مان کر ر د کی دوری سے قوس کھینچو ۔ پھر ب کو مرکز مان کر ب ع کی دوری سے قوس کھینچو ۔ اگر دونوں قوسیں م پر ملیں تو م مطلوبہ دائرے کا مرکز ہوگا ؛

نوٹ : دونوں قوسیں ایک اور نقطے پر بھی ملیں گی ۔ اس لیے ایک اور دائرہ بھی مسلماتِ معلومہ سے بن سکے گا ۔

5 دائرہ بنانا۔ جس کا نصف قطر معلوم ہو اور جو دو دیے ہوئے دائروں کو اپنے اندر لیتا ہُوا مس کرے۔

اموُرِ معلوُمہ: فرض کرو دو دائرے ہیں۔ جن کے مرکز ل، ب ہیں۔ اور مطلوبہ دائرے کا نصف قطر س ہے۔

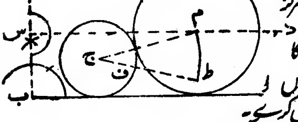


مطلوب: دائرہ بنانا جس کا نصف قطر س ہو۔ اور جو ⊙ ل، ⊙ ب کو اپنے اندر لیتا ہُوا بیرونی طور پر مس کرے۔

عمل: ل ب کو ملاؤ اور اُس کو بڑھاؤ کہ وہ دائروں کو ج، د، س، ع پر ملے۔ ج ع کو دونوں طرف بڑھاؤ تا آنکہ د ک = س ل = س۔ ل اور ب کو مرکز مان کر بالترتیب ل ک اور ب ل نصف قطر لے کر قوسیں کھینچو جو نقطہ م پر ملیں۔ م مرکز سے س نصف قطر کی دُوری پر دائرہ کھینچو۔ یہی مطلوبہ دائرہ ہوگا۔ بتاؤ کیا اس صُورت میں بھی دو دائرے ہو سکتے ہیں؟

6 دائرہ بنانا۔ جس کا نصف قطر معلوم ہو اور جو ایک دیے ہوئے دائرے اور ایک دیے ہُوئے خط کو مس کرے۔

اموُرِ معلوُمہ: ل ب دیا ہُوا خط س مطلوبہ دائرے کا نصف قطر اور ایک دیا ہُوا دائرہ جس کا مرکز ج ہے۔

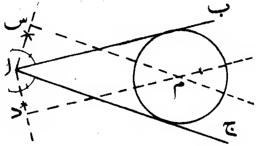


مطلوب: دائرہ بنانا۔ جس کا نصف قطر س ہو۔ جو ل ب کو مس کرے اور دائرہ ج کو بھی مس کرے۔

عمل: خط د س ∥ ل ب فاصلہ س پر کھینچو۔ معلومہ دائرے کا کوئی سا نصف قطر ج ف لو اور اُس کو ط تک بڑھاؤ تاکہ ف ط = س ہو جائے۔ ج کو مرکز مان کر ج ط کی دُوری سے قوس کھینچو۔ جو د س کو م پر کاٹے۔ م کو مرکز مان کر س نصف قطر سے دائرہ کھینچو۔ یہی مطلوبہ دائرہ ہوگا۔

7 دائرہ کھینچنا۔ جس کا نصف قطر دیا ہُوا ہو اور جو معلومہ خطوطِ متقاطع کو مس کرے ۔

امورِ معلومہ : اب اور اج دو متقاطع خطوط اور س مطلوبہ دائرے کے نصف قطر کی لمبائی



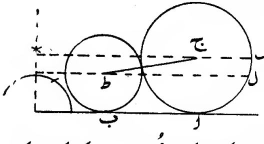
مطلوب : دائرہ بنانا جو اب، اج کو مس کرے اور جس کا نصف قطر س ہو۔

عمل : خط دم کھینچو۔ جو اب کے متوازی اور اس سے س فاصلے پر ہو۔ خط س م کھینچو جو اج کے ۱۱ اور اس سے س فاصلے پر ہو۔ فرض کرو یہ خطوط م پر کاٹتے ہیں۔ م کو مرکز مان کر س کی دُوری سے دائرہ کھینچو۔ یہی مطلوبہ دائرہ ہوگا ۔

8 دو دائرے جن کے نصف قطروں کے طول معلوم ہوں کھینچنا۔ جو ایک دُوسرے کو مس کریں اور ایک خط کو اس کے ایک ہی طرف مس کریں ۔

امورِ معلومہ : خط اب اور دو لمبائیاں د اور س

مطلوب : دو دائرے بنانا۔ جن کے نصف قطر د اور س ہوں جو آپس میں مس کریں اور خط اب کو مس کریں۔

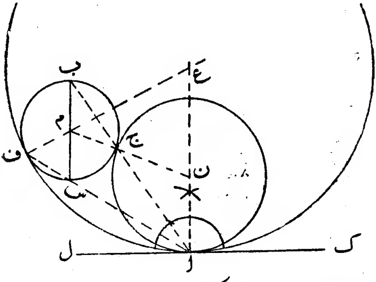


عمل : دو خط ک، ل خط اب کے متوازی د اور س فاصلوں پر کھینچو۔ خط ک میں کوئی نقطہ ج لو۔ ج کو مرکز مان کر اور (د + س) کی دُوری سے قوس کھینچو۔ جو خط ل کو ط پر کاٹے۔ ج کو مرکز مان کر د کی دُوری سے اور ط کو مرکز مان کر س کی دُوری سے دائرے کھینچو۔ یہی مطلوبہ دائرے ہوں گے ۔

9 دائرہ بنانا جو دیے ہُوئے دائرے کو مس کرے اور دیے ہُوئے خط کو

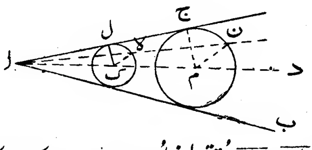
دِیے ہُوئے نُقطے پر مس کرے ؂

اُمُورِ معلُومہ : دائرہ جس کا مرکز م ہے - ایک خط ک ل جس میں نُقطہ ا ہے -
مطلُوب : دائرہ بنانا جو ⊙ م کو مس کرے اور ک ل کو نُقطہ ا پر مس کرے -



عمل : خط ا ن خط ک ل پر عمُوداً کھینچو -
قطر ب س عمود ا ن کے ॥ کھینچو -
ا ب اور ا س کو مِلاؤ جو دائرے کو نقاط ج ، ف پر مِلیں -
م ج ، ف م کو مِلاؤ اور اُن کو بڑھاؤ کہ وُہ عمُود ا ن کو ن اور ع پر مِلیں -
ن کو مرکز مان کر ن ا کی دُوری سے دائرہ کھینچو -
ع 〃 〃 ع ا 〃 〃 〃
یہ دو مطلُوبہ دائرے ہوں گے ؂

10 ۔ دائرہ کھینچو جو دو مُتقاطع خطُوط کو مس کرے اور اُن کے مابین کسی دِیے ہُوئے نقطے میں سے گزُرے ؂



اُمُورِ معلُومہ : ا ب ، ا ج دو مُتقاطع خطُوط ہیں اور "ن" اِن کے مابین کوئی نُقطہ ہے

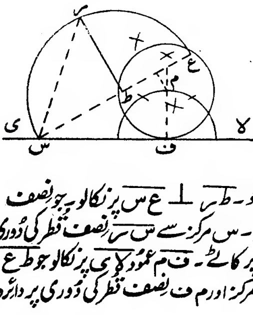
مطلوب: دائرہ بنانا جو "ن" میں سے گزرے اور ا ب، ا ج کو مس کرے۔

عمل: خط ا د کھینچو جو زاویہ ب ا ج کی تنصیف کرے۔
ا د پر کوئی نقطہ ک لو اور اُس سے ا ج پر عمود ک ل گراؤ۔
ک کو مرکز مان کر ک ل کی دوری سے دائرہ کھینچو۔
ا ن کو ملاؤ۔ اور فرض کرو کہ یہ دائرے کو لا پر ملتا ہے۔ لا ک کو ملاؤ۔ ن سے ن م کھینچو جو لا ک کے ॥ ہو اور ا د کو م پر ملے۔
م کو مرکز مان کر م ن کی دوری سے دائرہ کھینچو۔
یہی مطلوبہ دائرہ ہو گا۔
ثبوت بہم پہنچاؤ۔

11 ایک دائرہ کھینچو جو دو معلومہ نقطوں میں سے گزرے۔ اور ایک دیے ہوئے خطِ مستقیم کو مس کرے ؛

امورِ معلومہ: فرض کرو ع اور ط دو نقطے اور لا ی ایک خطِ مستقیم معلوم ہے۔

مطلوب: دائرہ بنانا جو لا ی کو مس کرتا ہوا ع اور ط میں سے گزرے۔



عمل: ع ط کو ملاؤ اور اُسے بڑھاؤ تاآنکہ لا ی کو س پر کاٹے۔
ع س کو قطر مان کر نصف دائرہ کھینچو۔ ط ر ⊥ ع س پر نکالو جو نصف دائرے کو ر پر کاٹے س ر کو ملاؤ۔ س مرکز سے س ر نصف قطر کی دوری پر ایک قوس لگاؤ۔ جو لا ی کو ف پر کاٹے۔ ف م عمود لا ی پر نکالو جو ط ع کے عمودی ناصف کو م پر ملے۔ م مرکز اور م ف نصف قطر کی دوری پر دائرہ کھینچو۔ یہی مطلوبہ دائرہ ہوگا ؛

دائروں کی ساخت پر امتحانی سوالات

یونیورسٹی پرچہ جات سے

1 دائرہ بناؤ جس کا نصف قطر معلوم ہو اور جو دیے ہوئے خطوطِ مستقیم کو مس کرے۔

2 ایک دائرے کا نصف قطر 1.7 گ اور وتر 1.6 گ ہے۔ عملی شکل کے ذریعے سے نیز حساب لگا کر مرکز سے وتر کا فاصلہ معلوم کرو۔ اُسی لمبائی کا دُوسرا وتر کھینچو جو پہلے وتر پر علی القوائم ہو۔

3 نقاط ا، ب $\frac{1}{2}$ فاصلے پر ہیں۔ دائرہ کھینچو جو اُن نقاط میں سے گزرے۔ اور جس کا مرکز خطِ ا ج پر ہو جو اُسے گزرتا ہُوا اب کے ساتھ 60° کا زاویہ بناتا ہے دائرے کا رقبہ تخمیناً معلوم کرو۔

4 دائرہ کھینچو جو نقاط $(3، -3)$ اور $(-1، -1)$ میں سے گزرے اور جس کا مرکز x محور پر ہو۔ نصف قطر کا طول معلوم کرو۔

5 دائرہ کھینچو۔ جس کا مرکز $\triangle$ کے ایک ضلع پر ہو اور باقی دو ضلعوں کو مس کرے۔

6 دائرہ کھینچو جو دو نقاط میں سے گزرے۔ جن کا باہمی فاصلہ 2 گ ہے۔ دائرے کا نصف قطر $1\frac{3}{4}$ ہے۔ مرکز کا فاصلہ اُس خط سے معلوم کرو جو دونوں نقاط میں سے گزرتا ہے۔

7 2.7 سم نصف قطر کا دائرہ کھینچو۔ جس کا مرکز دیے ہُوئے خط سے 4 سم ہو۔ 2.4 سم نصف قطر کا ایک اور دائرہ کھینچو جو اُس خط اور دائرہ دونوں کو مس کرے۔ نقاطِ تماس کا باہمی فاصلہ معلوم کرو۔

8 دو دائروں کے نصف قطر 3 سم اور 4.5 سم ہیں۔ اُن کا مرکزی فاصلہ 5.7 سم ہے۔ ان کا وتر مشترک اور مماس مشترک اور ان کی لمبائی معلوم کرو۔ حساب لگا کر نتیجے کی پڑتال کرو۔

9 دو دائرے بناؤ۔ جن کا نصف قطر 1.5 گ اور مرکزی فاصلہ 2 گ ہو۔ 0.5 گ نصف قطر کا ایک اور دائرہ بناؤ جو ایک دائرے کو داخلی طور پر اور دُوسرے کو خارجی طور پر مس کرے نقاطِ تماس کا باہمی فاصلہ معلوم کرو اور بتاؤ کہ ایسے کتنے دائرے بنائے جا سکتے ہیں؟

10 △ بناؤ جس کے اضلاع 6 سم، 7 سم اور 8 سم ہوں، △ کے راسوں کو مرکز مان کر دائرے کھینچو جو قاعدوں کو مس کریں۔ ان دائروں کے نصف قطر معلوم کرو۔

11 دو خط مُبداء سے نکلتے ہیں۔ ان میں سے ایک لا۔ محور کے ساتھ مُنطبق ہے۔ اور اُن کا باہمی زاویہ 60° ہے۔ دائرہ کھینچو جو ان دو خطوں کو مس کرے اور اُس نقطے میں سے گزرے جس کے مُعینین (3، 3) ہیں۔

12 دائرہ کھینچو۔ جس کا نصف قطر معلوم ہو اور جو دو دِیے ہوئے نقاط میں سے گزرے۔

13 دو مُتوازی خط کھینچو۔ جن کا باہمی فاصلہ 2 سم ہو اور ایک خطِ قاطع کھینچو جو دونوں کو 45° پر قطع کرے دائرہ کھینچو۔ جو دونوں خطوط مُتوازی اور خطِ قاطع کو مس کرے نقاطِ تماس کو مِلاؤ اور اس طرح پیدا شدہ △ کا اقل ترین ضلع ناپو۔

14 کسی دائرے کا مرکز خطِ مستقیم کھینچے بغیر معلوم کرو۔

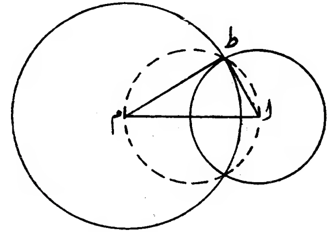
15 ایک سم اور دو سم نصف قطروں کے دو دائرے ایسے کھینچو۔ جن کے مُشترک مماس ہائے مخالف ایک دُوسرے کے ساتھ قائمے زاویے بنائیں۔

16 2 سم نصف قطر کے دائرے کو چند (مثلاً چار) ہم مرکز دائرے کھینچ کر برابر حصّوں میں تقسیم کرو۔

علی القوائم دوائر

تعریف: اگر دو دائرے ایک دُوسرے کو اس طرح قطع کریں۔ کہ نقاطِ تقاطع کے مماس ایک دُوسرے کے ساتھ قائمہ زاویے بنائیں تو کہا جائے گا کہ وُہ دائرے علی القوائم قطع کرتے ہیں ۔

1 دائرہ بناؤ۔ جس کا مرکز دیے ہُوئے نقطہ پر ہو اور جو کسی دِیے ہُوئے دائرے کو علی القوائم قطع کرے ۔



مفرُوض: فرض کرو دِیے ہُوئے دائرے کا مرکز ا ہے اور م کوئی اور نُقطہ دیا ہُوا ہے۔
مطلُوب: دائرہ بنانا ہے۔ جس کا مرکز م ہو اور جو ⊙ ا کو علی القوائم قطع کرے۔
عمل: نقطہ م سے ⊙ ا پر مماس م ط کھینچو۔ م کو مرکز لے کر م ط کی دُوری سے ایک دائرہ بناؤ۔ یہی مطلُوبہ دائرہ ہوگا ۔

2 اگر دو دائرے علی القوائم قطع کریں تو اُن کے نصف قُطروں کے مُربّعوں کا مجمُوعہ اُن کے مرکزی خط کے مُربّعے کے برابر ہو گا ۔

ثبُوت: اُوپر کی شکل میں م ط ا زاویہ قائمہ ہے۔

اس لیے $\overline{م ط}^2 + \overline{ا ط}^2 = \overline{ا م}^2$

(فہو المطلُوب)

نسبت تناسب اور متشابہ اشکال

1 اگر مقدار ف میں ا اکائیاں اور مقدار ق میں اُسی پیمانے کی ب اکائیاں شامل ہوں تو ف اور ق کی باہمی نسبت ا اور ب کی باہمی نسبت کے برابر ہوگی۔ اور اسے ا : ب یا ا/ب کے ذریعے سے ظاہر کیا جائے گا۔

دو مقداروں میں نسبت معلوم کرنے کے لیے ضروری ہے کہ اُن کا پیمانہ مشترک ہو۔ اس صورت میں نسبت ایک کسر ہوگی جس کے شمار کنندہ اور نسب نما صحیح عدد ہوں گے۔ ایسی مقداروں کو متوافق (کمنشریبل) مقداریں کہیں گے۔ لیکن اگر دو مقداریں ایسی ہوں کہ اُن کا مشترکہ پیمانہ معلوم نہ ہو سکے تو ان کو متبائن (ان کمنشریبل) مقداریں کہیں گے۔ ایسی مقداروں کی نسبت کسر میں ظاہر نہیں کی جا سکتی۔ صفحاتِ آئندہ میں ہم صرف متوافق طول اور متوافق رقبوں پر اکتفا کریں گے۔

2 جن مقداروں میں ایک سی نسبت ہو انھیں متناسب مقداریں کہیں گے۔ مثلاً اگر ا : ب = ج : د تو یہ چاروں مقداریں متناسب ہیں۔ ان کے باہمی تعلق کو اس طرح بیان کرتے ہیں:۔

ا کی نسبت ب سے وہی ہے جو ج کی نسبت د سے ہے۔

مسائلِ ذیل کارآمد ثابت ہوں گے:۔

(1) اگر ا : ب = ج : د تو م × ا : ن × ب = م × ج : ن × د

(2) اگر ا : ب = ج : د تو ج ⋛ د سے اگر ا ⋛ ب سے

(3) اگر ا : ب = ج : د تو ب : ا = د : ج

(4) اگر ا : ب = ج : د اور ا = م × ب تو
ج = م × د

(5) اگر ا : ب = ج : د اور ج : د = ر : س
تب ا : ب = ر : س

(6) اگر ا : ب = ج : د = ر : س

تب ا+ج+س : ب+د+ س = ا : ب

(7) اگر ا : ب = ج : د

تب ا : ج = ب : د (ابدالِ نسبت)

(8) اگر ا : ب = ج : د

تب ا+ب : ب = ج+د : د (ترکیبِ نسبت)

(9) اگر ا+ب : ب = ج+د : د

تب ا+ب : ا = ج+د : ج

(10) اگر ا : ب = ج : د اور ب : ف = د : ق

تب ا : ف = ج : ق

(11) اگر ا : ب = ج : د

تب ا − ب : ب = ج − د : د (تفصیلِ نسبت)

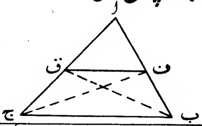
اگر نسبتوں کو کسری صورت میں لکھ دیا جائے تو مسائل متذکرۂ بالا کا ثبوت آسان ہو جاتا ہے۔ کیونکہ کسروں پر معمولی عمل کرنے سے مطلوبہ نتائج حاصل ہو جاتے ہیں۔

تعریف۔ متشابہ اشکال: دو اشکال مستوی باہم متشابہ کہلاتی ہیں۔ جب وہ متساوی الزوایا ہوں اور اُن کے نظیری اضلاع متناسب ہوں۔

مسئلہ 91

(اثباتی)

اگر کوئی خطِ مستقیم مثلّث کے کسی ضلعے کے متوازی کھینچا جائے تو باقی دو ضلعے ایک ہی نسبت پر قطع ہوں گے ؀



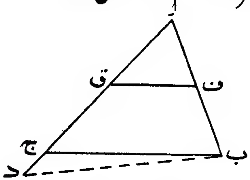
مفروض	فرض کرو △ اب ج میں خط $\overline{\text{ف ق}}$ خط $\overline{\text{ب ج}}$ کے ‖ کھینچا گیا ہے ؀
مطلوب	اف : ف ب = اق : ق ج ؀
عمل	$\overline{\text{ب ق}}$ ، $\overline{\text{ج ف}}$ کو ملاؤ ؀
ثبوت	△ن اق ف ، ب ق ف کا عمود مشترک ہے پس $\dfrac{\triangle\ \text{اق ف}}{\triangle\ \text{ب ق ف}} = \dfrac{\frac{1}{2}\ \text{عمود} \times \text{اف}}{\frac{1}{2}\ \text{عمود} \times \text{ب ف}} = \dfrac{\text{اف}}{\text{ف ب}}$ ؀ اسی طرح △ن اف ق ، ج ف ق کا عمود مشترک ہے پس $\dfrac{\triangle\ \text{اف ق}}{\triangle\ \text{ج ف ق}} = \dfrac{\frac{1}{2}\ \text{عمود} \times \text{اق}}{\frac{1}{2}\ \text{عمود} \times \text{ق ج}} = \dfrac{\text{اق}}{\text{ق ج}}$ ؀ مگر △ ب ق ف = △ ج ف ق (کیونکہ وہ ایک ہی قاعدہ ف ق پر اور ایک ہی خطوط ‖ میں واقع ہیں) پس $\dfrac{\triangle\ \text{اق ف}}{\triangle\ \text{ب ق ف}} = \dfrac{\triangle\ \text{اف ق}}{\triangle\ \text{ج ف ق}}$ یعنی $\dfrac{\text{اف}}{\text{ف ب}} = \dfrac{\text{اق}}{\text{ق ج}}$ یا اف : ف ب = اق : ق ج (فهوالمطلوب)

نتیجۂ صریح (1) اف : اب = اق : اج (2) اف : اق = ف ب : ق ج

مسئلہ 91 کا عکس

(اثباتی)

اگر کوئی خطِ مستقیم مثلث کے دو ضلعوں کو ایک ہی نسبت پر قطع کرے تو وہ تیسرے ضلع کے متوازی ہوگا ۔

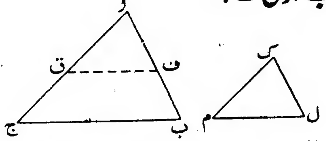


مفروض	فرض کرو خط ف ق مثلث ا ب ج کے اضلاع ا ب ، ا ج کو اس طرح قطع کرتا ہے کہ ا ف : ف ب = ا ق : ق ج
مطلوب	خط ف ق خط ب ج کے ‖ ہوگا ۔
عمل	اگر خط ف ق خط ب ج کے ‖ نہیں تو ب د ‖ ف ق کے کھینچو ۔
ثبوت	ف ق ‖ ہے ب د کے $\therefore \frac{\text{ا ف}}{\text{ف ب}} = \frac{\text{ا ق}}{\text{ق د}}$ لیکن $\frac{\text{ا ف}}{\text{ف ب}} = \frac{\text{ا ق}}{\text{ق ج}}$ (مفروض) پس $\frac{\text{ا ق}}{\text{ق د}} = \frac{\text{ا ق}}{\text{ق ج}}$ یعنی ق د = ق ج لہذا نقطہ د نقطہ ج پر منطبق ہے پس ف ق ‖ ہے ب ج کے ۔ (فہو المطلوب)

مسئلہ 92

(اثباتی)

اگر دو مثلثوں کے متناظرہ زاویے برابر ہوں۔ تو اُن کے متناظرہ ضلعے متناسب ہوں گے۔



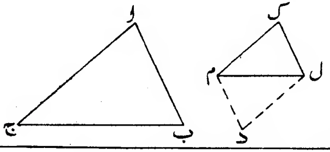
مفروض	فرض کرو $\triangle^{\text{ن}}$ ا ب ج، ک ل م میں $\hat{\text{ا}} = \hat{\text{ک}}$، $\hat{\text{ب}} = \hat{\text{ل}}$ اور $\hat{\text{ج}} = \hat{\text{م}}$
مطلوب	$\frac{\overline{\text{اب}}}{\overline{\text{کل}}} = \frac{\overline{\text{بج}}}{\overline{\text{لم}}} = \frac{\overline{\text{جا}}}{\overline{\text{مک}}}$
عمل	$\overline{\text{اب}}$ میں سے $\overline{\text{اف}} = \overline{\text{کل}}$ کاٹو۔ $\overline{\text{اج}}$ میں سے $\overline{\text{اق}} = \overline{\text{کم}}$ کاٹو اور $\overline{\text{فق}}$ کو مِلاؤ۔
ثبوت	$\triangle^{\text{ن}}$ اف ق، ک ل م میں $\because$ $\overline{\text{اف}} = \overline{\text{کل}}$، $\overline{\text{اق}} = \overline{\text{کم}}$ اور $\hat{\text{ا}} = \hat{\text{ک}}$ $\therefore$ $\triangle^{\text{ن}}$ مُنطبق ہیں اور $\text{ا}\hat{\text{ف}}\text{ق} = \hat{\text{ل}} = \hat{\text{ب}}$ لیکن $\text{ا}\hat{\text{ف}}\text{ق}$ اور $\hat{\text{ب}}$ متناظرہ زاویے ہیں $\therefore$ خط $\overline{\text{فق}}$ خط $\overline{\text{بج}}$ کے ‖ ہے۔ پس $\frac{\text{اب}}{\text{اف}} = \frac{\text{اج}}{\text{اق}}$ (بروئے نتیجۂ صریح مسئلہ 91) مگر $\overline{\text{اف}} = \overline{\text{کل}}$ اور $\overline{\text{اق}} = \overline{\text{کم}}$ پس $\frac{\text{اب}}{\text{کل}} = \frac{\text{اج}}{\text{کم}}$ اِسی طرح ثابت ہو سکتا ہے کہ $\frac{\text{بج}}{\text{لم}} = \frac{\text{اج}}{\text{کم}}$ پس $\frac{\text{اب}}{\text{کل}} = \frac{\text{بج}}{\text{لم}} = \frac{\text{اج}}{\text{کم}}$ (فھوَ المطلوب)

نتیجۂ صریح: اگر ایک $\triangle$ کے دو زاویے دُوسرے $\triangle$ کے دو زاویوں کے برابر ہوں تو دونوں $\triangle$ مُتشابہ ہوں گے۔

مسئلہ 92 کا عکس

(اثباتی)

اگر دو مثلثوں کے متناظرہ اضلاع متناسب ہوں۔ تو مثلث متساوی الزّوایا ہوں گے ۔



مفروض — فرض کرو اب ج، ک ل م دو △ ہیں جن میں $\frac{\text{اب}}{\text{ک ل}} = \frac{\text{ب ج}}{\text{ل م}} = \frac{\text{ج ا}}{\text{م ک}}$

مطلوب — $\hat{\text{ا}} = \hat{\text{ک}}$ ، $\hat{\text{ب}} = \hat{\text{ل}}$ ، $\hat{\text{ج}} = \hat{\text{م}}$

عمل — خط ل م پر ک کی دوسری طرف $\text{م}\hat{\text{ل}}\text{د} = \hat{\text{ب}}$ اور $\text{ل}\hat{\text{م}}\text{د} = \hat{\text{ج}}$ بناؤ ۔

ثبوت — بروئے عمل △ ل د م △ اب ج سے متساوی الزّوایا ہے ۔

پس $\frac{\text{اب}}{\text{د ل}} = \frac{\text{ب ج}}{\text{ل م}} = \frac{\text{ج ا}}{\text{م د}}$

مگر $\frac{\text{اب}}{\text{ک ل}} = \frac{\text{ب ج}}{\text{ل م}} = \frac{\text{ج ا}}{\text{م ک}}$ (مفروض)

لہٰذا $\overline{\text{د ل}} = \overline{\text{ک ل}}$ ، $\overline{\text{م د}} = \overline{\text{م ک}}$

∴ △ن ک ل م، د ل م میں تینوں اضلاع اپنے اپنے نظیری اضلاع کے برابر ہیں ۔ پس △ن منطبق ہیں ۔ اور

$\text{ک}\hat{\text{ل}}\text{م} = \text{د}\hat{\text{ل}}\text{م} = \hat{\text{ب}}$ (بروئے عمل)

اور $\text{ل}\hat{\text{م}}\text{ک} = \text{ل}\hat{\text{م}}\text{د} = \hat{\text{ج}}$ (")

اور $\hat{\text{ک}} = \hat{\text{د}} = \hat{\text{ا}}$

پس △ن اب ج، ک ل م متساوی الزّوایا ہیں ۔

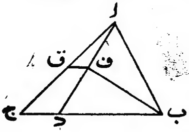
(فهو المطلوب)

مشق 91

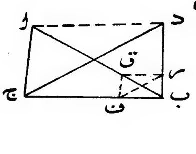
1 مسئلہ 91 سے مسئلہ 19 اور مسئلہ 20 مُستنبط کرو ۔

2 ذوزنقہ کے وتر ایک دُوسرے کو ایک ہی نسبت سے قطع کرتے ہیں ۔

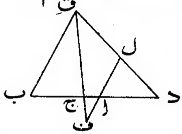
3 ا ب ج کوئی △ ہے۔ ب ق زاویہ ب کا ناصف ہے۔ جس پر ا د عمود ہے اگر خط ف ق، خط د ج کے ‖ کھینچا جائے تو ثابت کرو کہ نقطہ ق خط ا ج کا وسطی نقطہ ہوگا ۔



4 ا ب ج اور د ب ج دو △ ہیں جو ایک ہی قاعدہ ب ج پر واقع ہیں۔ ب ج کے کسی نقطہ ف سے ف ق خط ج ا کے ‖ کھینچا گیا ہے جو ا ب کو ق پر ملتا ہے۔ ف ر خط ج د کے ‖ کھینچا گیا ہے۔ جو ب د کو ر پر ملتا ہے۔
ثابت کرو کہ ق ر خط ا د کے ‖ ہے ۔

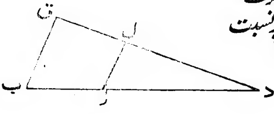


دیے ہوئے خط ا ب کو داخلی اور خارجی طور پر نسبت م : ن میں تقسیم کرنا۔



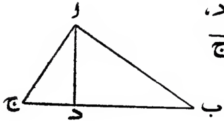
1 داخلی تقسیم: ا، ب سے دو ‖ خطوط ا ف، ب ق مخالف سمتوں میں کھینچو۔ ا ف کو م اور ب ق کو ن اکائیوں کے برابر لو۔ ف ق کو ملاؤ۔ جو ا ب کو ج پر قطع کرے۔ تب ا ب داخلی طور پر نقطہ ج پر نسبت م : ن میں تقسیم ہو جائے گا ۔

2 خارجی تقسیم: ا، ب سے دو ‖ خطوط ا ل، ب ق ایک ہی سمت میں کھینچو۔ ا ل کو م اور ب ق کو ن اکائیوں کے برابر لو۔ ق ل کو ملاؤ۔ جو ب ا کو بڑھانے پر نقطہ د پر قطع کرے تب ا ب خارجی طور پر نقطہ د پر نسبت م : ن میں تقسیم ہو جائے گا۔

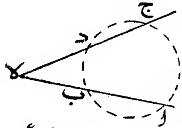


(ثبوت دو)

مشق 92



1 △ اب ج میں آ قائمہ ہے۔ وتر ب ج پر عمود ا د گرایا گیا ہے۔ ثابت کرو △ن اب د، ا ج د، اب ج متشابہ ہیں اور ب د × د ج
= اد² اور ب ج × ب د
= اب² ۔



2 خطوط اب، ج د نقطہ لا پر قطع کرتے ہیں اس طور پر کہ لا ا : لا ج = لا د : لا ب
ثابت کرو کہ ا، ب، ج، د مندائر ہیں ۔

3 سوال نمبر 2 کی شکل میں ثابت کرو کہ △ ب لا د اور △ ا لا ج متشابہ ہیں ۔

4 قاعدہ ف ق پر اس کے دونوں طرف △ن ف ق ر، ف س ق بنائے گئے ہیں۔ راس ر، س کو ملانے والا خط قاعدے کو ط پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ
△ ف ق ر : △ ف ق س = ر ط : س ط ۔

5 ||ع اب ج د کے ضلع ا د کا وسطی نقطہ م ہے خط ب م وتر ا ج کو ر پر اور ج د کو ق پر کاٹتا ہے۔ ثابت کرو کہ ق ر = 2 ر ب ۔

6 ایک نقطے سے متعدد خطوطِ قاطع کھینچے گئے ہیں جو دو متوازی خطوط کو کاٹتے ہیں۔ ثابت کرو کہ متوازی خطوط پر کے ٹکڑے باہم ایک ہی تناسب میں ہوں گے۔

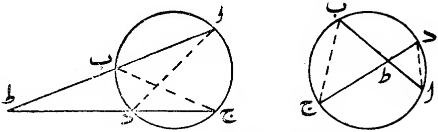
7 اگر منحرف کا ایک وتر دوسرے کو 1 : 2 میں قطع کرتا ہے تو ثابت کرو کہ منحرف کا ایک متوازی خط دوسرے سے دوچند ہے ۔

8 اب ایک خطِ مستقیم ہے ا ف اور ب ق دو || خطوط ہیں جو اب کی مخالف سمتوں میں کھینچے گئے ہیں ف ق خط اب کو ج پر کاٹتا ہے۔ ثابت کرو کہ
ا ج : ج ب = ا ف : ب ق

9 منحرف اب ج د کے متوازی اضلاع میں اب = 4.5 گ اور ج د = 2.4 گ ہیں اور اس کا ارتفاع 3 گ ہے۔ اگر ا ج، ب د نقطہ ع پر ملیں۔ تو بتاؤ نقطہ ع خط اب سے کتنا اونچا ہے؟

مسئلہ 75 ، 76 کا دُوسرا ثبُوت

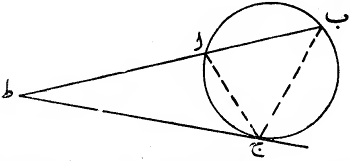
اگر دائرے کے دو وَتر ایک دُوسرے کو دائرے کے اندر یا باہر قطع کریں تو ایک وَتر کے دونوں حصّوں کی سطح دُوسرے وَتر کے دونوں حصّوں کی سطح کے برابر ہو گی ۔



مفرُوض	فرض کرو اب اور ج د دائرے کے دو وَتر ہیں جو ایک دُوسرے کو نقطہ ط پر ملتے ہیں ۔
مطلُوب	طا × طب = طج × طد ۔
عمل	اد ، ب ج کو ملاؤ ۔
ثبُوت	△ن طاد ، طب ج میں ب̂ = د̂ (ایک ہی قطعہ کے زاویے) اط̂د = بط̂ج (پہلی شکل میں راسی متقابلہ زاویے اور دُوسری شکل میں مشترک زاویہ) پس تیسرے زاویے بھی مُساوی ہیں اور △ن مُتساوی الزّوایا ہیں ۔ لہٰذا دونوں مثلّث متشابہ ہیں ۔ پس $\dfrac{\text{طا}}{\text{طد}} = \dfrac{\text{طج}}{\text{طب}}$ یعنی طا × طب = طج × طد (فہوالمطلُوب)

مسئلہ 78 کا دُوسرا ثبوت

اگر کسی بیرُونی نُقطے سے دائرے تک ایک خطِ قاطع اور ایک خطِ مماس کھینچے جائیں تو سارے خطِ قاطع اور اُس کے بیرُونی حصّے کی سطح مماس پر کے مُربّع کے برابر ہوگی ۔

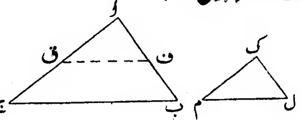


مفروض	فرض کرو بیرُونی نُقطہ ط سے دائرے تک ط ا ب خطِ قاطع اور ط ج خطِ مماس کھینچے گئے ہیں ۔
مطلوب	ط ا × ط ب = ط ج^{2} ۔
عمل	ا ج اور ب ج کو مِلاؤ ۔
ثبوت	ط ج مماس ہے ۔ ∴ ∠ط ج ا = ∠ب (مُتبادلہ قطعے کا زاویہ) اب △ن ا ط ج اور ب ط ج مُتساوی الزّوایا ہیں۔ کیونکہ ∠ط ج ا = ∠ب اور زاویہ ط مُشترک ہے۔ پس △ ا ط ج اور △ ب ط ج مُتشابہ ہیں۔ اور $\frac{\text{ط ا}}{\text{ط ج}} = \frac{\text{ط ج}}{\text{ط ب}}$ پس ط ا × ط ب = ط ج^{2} (فہو المطلوب)

مسئلہ 93

(اثباتی)

اگر دو مثلثوں میں ایک مثلث کا زاویہ دوسرے مثلث کے زاویے کے برابر ہو اور اُن مُساوی زاویوں کے اضلاع مُحیط باہم متناسب ہوں تو مثلث متشابہ ہوں گے۔

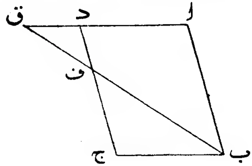


مفروض	فرض کرو $\triangle$ ن اب ج، ک ل م میں $\hat{\text{ا}} = \hat{\text{ک}}$ اور $\frac{\text{اب}}{\text{کل}} = \frac{\text{اج}}{\text{کم}}$
مطلوب	$\triangle$ اب ج $\triangle$ ک ل م متشابہ ہیں۔
عمل	اب میں سے $\overline{\text{اف}} = \overline{\text{کل}}$ کاٹو۔ $\overline{\text{اج}}$ میں سے $\overline{\text{اق}} = \overline{\text{کم}}$ کاٹو۔ ف ق کو ملاؤ
ثبوت	∵ $\overline{\text{اف}} = \overline{\text{کل}}$، $\overline{\text{اق}} = \overline{\text{کم}}$ اور $\hat{\text{ا}} = \hat{\text{ک}}$ ∴ $\triangle$ اف ق $\equiv$ $\triangle$ ک ل م پس $\hat{\text{ف}} = \hat{\text{ل}}$ اور $\hat{\text{ق}} = \hat{\text{م}}$ پھر ∵ $\frac{\overline{\text{اب}}}{\text{کل}} = \frac{\overline{\text{اج}}}{\text{کم}}$ (مفروض) اور $\overline{\text{اف}} = \overline{\text{کل}}$، $\overline{\text{اق}} = \overline{\text{کم}}$ (بروئے عمل) پس $\frac{\text{اب}}{\text{اف}} = \frac{\text{اج}}{\text{اق}}$ لہذا $\overline{\text{ف ق}} \parallel$ ہے $\overline{\text{ب ج}}$ کے پس $\hat{\text{ف}} = \hat{\text{ب}}$ اور $\hat{\text{ق}} = \hat{\text{ج}}$ مگر ہم ثابت کر چکے ہیں کہ $\hat{\text{ف}} = \hat{\text{ل}}$ اور $\hat{\text{ق}} = \hat{\text{م}}$ پس $\hat{\text{ب}} = \hat{\text{ل}}$ اور $\hat{\text{ج}} = \hat{\text{م}}$ نیز $\hat{\text{ا}} = \hat{\text{ک}}$ (مفروض) پس $\triangle$ اب ج اور $\triangle$ ک ل م متساوی الزوایا ہیں اس لیے متشابہ ہیں (فہو المطلوب)

مشق 93

1 مثلّث کے تینوں اضلاع کے وسطی نقاط کو ملانے والے خطوط ایک ایسا مثلّث بناتے ہیں جو اصلی مثلّث کے متشابہ ہے ؎

2 اب ج د ||ع ہے اور ب ف ق کوئی خط قاطع ج د کو ف پر اور بڑھائے ہوئے ا د کو ق پر ملتا ہے
ثابت کرو کہ ج ف اور ا ق کی سطح ب ج اور ج د کی سطح کے مساوی ہے ؎



3 ب ج اور م ای دو متشابہ مثلّثان اب ج ، لا م ای کے قاعدے ہیں ۔ اف اور لا ق وسطانیے ہیں۔
ثابت کرو کہ ب اف = مالاق ؎

4 △ ل م ن کے قاعدے کے ناصف ل ف کی تنصیف نقطہ ق پر کی گئی ہے۔
اگر خط م ق خط ن ل کو س پر ملے تو ثابت کرو کہ ل س : س ن = 1 : 2 ؎

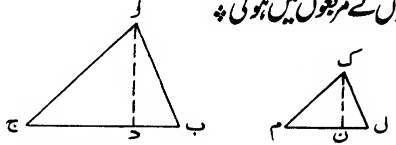
5 اب ج د کوئی چار ضلعی شکل ہے۔ جس میں ج د دائرہ اب ج کا مماس ہے۔ ثابت کرو کہ اگر اب × اج = ب ج × ج د تو اب دائرہ اج د کا مماس ہوگا ؎

6 مسئلہ نمبر 78 کی مدد سے ثابت کرو کہ کسی دائرے کا مماس اُس قطر پر عمود ہے۔ جو نقطۂ مماس میں سے گزرے ؎

مسئلہ 94

(اثباتی)

دو متشابہ مثلثوں کے رقبوں میں وہی نسبت ہوگی جو اُن کے متناظرہ ضلعوں کے مربعوں میں ہوگی ۔

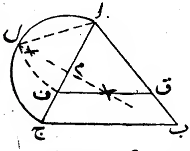


مفروض	فرض کرو △ن اب ج، ک ل م متشابہ ہیں ۔
مطلوب	$\frac{\text{رقبہ اب ج}}{\text{رقبہ ک ل م}} = \frac{\overline{\text{ب ج}}^2}{\overline{\text{ل م}}^2} = \frac{\overline{\text{ج ا}}^2}{\overline{\text{م ک}}^2} = \frac{\overline{\text{ا ب}}^2}{\overline{\text{ک ل}}^2}$
عمل	△ اب ج میں ا سے $\overline{\text{ب ج}}$ پر عمود $\overline{\text{ا د}}$ گراؤ ۔ اور △ ک ل م میں ک سے ل م پر $\overline{\text{ک ن}}$ عمود گراؤ ۔
ثبوت	∵ زاویہ ب = ل، ب د ا = ل ن ک ∴ ب ا د = ل ک ن پس △ن ا د ب، ک ن ل متشابہ ہیں ۔ $\therefore \frac{\overline{\text{ا د}}}{\overline{\text{ک ن}}} = \frac{\overline{\text{ا ب}}}{\overline{\text{ک ل}}} = \frac{\overline{\text{ب ج}}}{\overline{\text{ل م}}}$ اب $\frac{\text{رقبہ اب ج}}{\text{رقبہ ک ل م}} = \frac{\frac{1}{2}\overline{\text{ا د}} \times \overline{\text{ب ج}}}{\frac{1}{2}\overline{\text{ک ن}} \times \overline{\text{ل م}}} = \frac{\overline{\text{ا د}}}{\overline{\text{ک ن}}} \times \frac{\overline{\text{ب ج}}}{\overline{\text{ل م}}}$ $= \frac{\overline{\text{ب ج}}}{\overline{\text{ل م}}} \times \frac{\overline{\text{ب ج}}}{\overline{\text{ل م}}}$ (کیونکہ $\frac{\overline{\text{ا د}}}{\overline{\text{ک ن}}} = \frac{\overline{\text{ب ج}}}{\overline{\text{ل م}}}$) $= \frac{\overline{\text{ب ج}}^2}{\overline{\text{ل م}}^2}$ اِسی طرح $\frac{\text{رقبہ اب ج}}{\text{رقبہ ک ل م}} = \frac{\overline{\text{ج ا}}^2}{\overline{\text{م ک}}^2} = \frac{\overline{\text{ا ب}}^2}{\overline{\text{ک ل}}^2}$ (فہو المطلوب)

مشق 94

1 اب ج قائم الزاویہ مثلث ہے۔ زاویہ قائمہ ج سے وتر اب پر ج د عمود گرایا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ △ اج د : △ ب ج د = ج ا² : ج ب²

2 ثابت کرو کہ قائم الزاویہ مثلث کے تینوں اضلاع پر متساوی الاضلاع مثلث بنائے جائیں تو وتر پر کا مثلث باقی دو اضلاع پر کے مثلثوں کے مجموعے کے برابر ہوگا۔

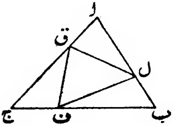


3 (ا) کسی مثلث میں قاعدے کے متوازی ایسا خط کھینچو جو مثلث کی تنصیف کرے۔

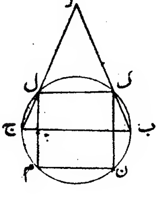
(ب) △ اب ج کے کسی ضلع ب ج کے ॥ ایسا خط لا ما کھینچو کہ △ الا ما = $\frac{9}{7}$ ب ج لا ما

[اشارہ: اب کو لا پر اس طرح تقسیم کرو کہ الا : لاب = 3 : 1]

4 △ اب ج کے اضلاع ب ج، ج ا، اب میں سے اُن کے تہائی حصے ج ن، ب ل، ا ق کاٹو۔ ثابت کرو کہ △ ن ق ل = $\frac{1}{3}$ △ اب ج اور ثابت کرو کہ ا ن، ب ق، ج ل کو ملانے سے جو مثلث بنے گا۔ اس کا رقبہ = $\frac{1}{7}$ △ اب ج ہوگا۔



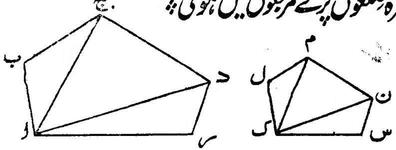
5 △ اب ج کے قاعدہ ب ج کو قطر مان کر دائرہ کھینچا گیا ہے۔ جو اب کو ک پر اور اج کو ل پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ اگر △ اک ل = $\frac{1}{2}$ △ اب ج تو ک ل دائرے کے اندرونی مربعے کا ایک ضلع ہے۔



مسئلہ 95

(اثباتی)

دو متشابہ کثیر الاضلاعوں کے رقبوں میں وہی نسبت ہوگی جو اُن کے متناظرہ ضلعوں پر کے مربعوں میں ہوگی۔



مفروض	فرض کرو اشکال اب ج د س، ک ل م ن س متشابہ ہیں۔
مطلوب	رقبہ اب ج د س : رقبہ ک ل م ن س $= \overline{\text{اب}}^2 : \overline{\text{کل}}^2 = \overline{\text{بج}}^2 : \overline{\text{لم}}^2 = \cdots\cdots$
عمل	$\overline{\text{اج}}$ ، $\overline{\text{اد}}$ ، $\overline{\text{کم}}$ ، $\overline{\text{کن}}$ کو ملاؤ۔
ثبوت	∵ اشکال متشابہ ہیں ∴ $\overline{\text{اب}} : \overline{\text{بج}} = \overline{\text{کل}} : \overline{\text{لم}}$ نیز $\hat{\text{ب}} = \hat{\text{ل}}$

پس $\triangle^{\text{ن}}$ اب ج، ک ل م متشابہ ہیں ∴ $\text{ب}\hat{\text{ج}}\text{ا} = \text{ل}\hat{\text{م}}\text{ک}$

مگر $\hat{\text{ج}} = \hat{\text{م}}$ ∴ باقی زاویہ $\text{ا}\hat{\text{ج}}\text{د} = \text{ک}\hat{\text{م}}\text{ن}$

نیز $\dfrac{\overline{\text{اج}}}{\overline{\text{کم}}} = \dfrac{\overline{\text{اد}}}{\overline{\text{کن}}} = \dfrac{\overline{\text{جد}}}{\overline{\text{من}}}$

پس $\triangle^{\text{ن}}$ ا ج د، ک م ن میں ایک ایک زاویہ برابر ہے اور اُس کے محیط اضلاع متناسب ہیں۔ پس $\triangle^{\text{ن}}$ متشابہ ہیں۔

لہذا $\dfrac{\triangle\text{ابج}}{\triangle\text{کلم}} = \dfrac{\overline{\text{اب}}^2}{\overline{\text{کل}}^2}$، $\dfrac{\triangle\text{اجد}}{\triangle\text{کمن}} = \dfrac{\overline{\text{جد}}^2}{\overline{\text{من}}^2} = \dfrac{\overline{\text{اب}}^2}{\overline{\text{کل}}^2}$

اور $\dfrac{\triangle\text{ادس}}{\triangle\text{کنس}} = \dfrac{\overline{\text{اس}}^2}{\overline{\text{کس}}^2} = \dfrac{\overline{\text{اب}}^2}{\overline{\text{کل}}^2}$

پس $\dfrac{\triangle\text{ابج} + \triangle\text{اجد} + \triangle\text{ادس}}{\triangle\text{کلم} + \triangle\text{کمن} + \triangle\text{کنس}} = \dfrac{\overline{\text{اب}}^2}{\overline{\text{کل}}^2}$

پس $\dfrac{\text{رقبہ ابجدس}}{\text{رقبہ کلمنس}} = \dfrac{\overline{\text{اب}}^2}{\overline{\text{کل}}^2}$ (فہو المطلوب)

مشق 95

1 مُتشابہ کثیرُالاضلاعوں میں وہی نسبت ہو گی جو اُن کے مُتناظرہ وَتروں پر کے مُربّعوں کی ۔

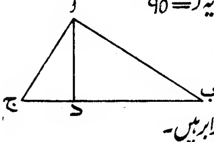
2 مُتدائرِ مُتشابہ کثیرُالاضلاعوں میں وہی نسبت ہو گی جو دائروں کے نِصف قُطروں پر کے مُربّعوں کی ۔

3 کثیرُالاضلاع بناؤ جو دیے ہُوئے کثیرُالاضلاع کے مُتشابہ ہو اور رقبے میں اِس سے نِصف ہو ۔

4 کثیرُالاضلاع بناؤ جو دِیے ہُوئے کثیرُالاضلاع کے مُتشابہ ہو اور رقبے میں اس کا ثُلث ہو ۔

5 چوکور اب ج د کے وَتر نُقطہ م پر قطع کرتے ہیں۔ ف، ق، ر، س خطُوط $\overline{\text{م ا}}$، $\overline{\text{م ب}}$، $\overline{\text{م ج}}$، $\overline{\text{م د}}$ کے نُقاطِ تثلیث ہیں جو م کے قریب واقع ہیں۔ ثابت کرو کہ رقبہ اب ج د $= 9 \times$ رقبہ ف ق ر س

مسئلہ فیثاغورث کا دُوسرا ثبُوت



مفرُوض: قائم الزّاویہ △ اب ج جس کا زاویہ $\hat{\text{ا}} = 90^\circ$

مطلُوب: $\overline{\text{اب}}^2 + \overline{\text{اج}}^2 = \overline{\text{ب ج}}^2$

عمل: ا سے $\overline{\text{ب ج}}$ پر عمُود $\overline{\text{ا د}}$ گراؤ۔

ثبُوت: △ ا د ب، ا د ج، اب ج مُتشابہ ہیں۔ کیونکہ ان کے زاویے برابر ہیں۔

نیز △ ا د ب + △ ا د ج = △ اب ج

تقسیم کرنے سے

$$\frac{\triangle\,\text{اب د}}{\triangle\,\text{اب ج}} + \frac{\triangle\,\text{ا د ج}}{\triangle\,\text{اب ج}} = 1$$

مگر

$$\frac{\triangle\,\text{ا د ب}}{\triangle\,\text{اب ج}} = \frac{\overline{\text{اب}}^2}{\overline{\text{ب ج}}^2} \quad \text{اور} \quad \frac{\triangle\,\text{ا د ج}}{\triangle\,\text{اب ج}} = \frac{\overline{\text{ا ج}}^2}{\overline{\text{ب ج}}^2}$$

پس

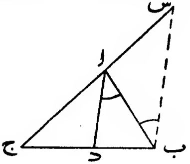
$$\frac{\overline{\text{اب}}^2}{\overline{\text{ب ج}}^2} + \frac{\overline{\text{اج}}^2}{\overline{\text{ب ج}}^2} = 1$$

یا $\overline{\text{اب}}^2 + \overline{\text{اج}}^2 = \overline{\text{ب ج}}^2$ (فھوَالمطلوُب)

مسئلہ 96

(اثباتی ۔ حصہ اوّل)

مثلث کے کسی زاویے کا داخلی ناصف مقابل کے ضلعے کو داخلی طور پر اُسی نسبت میں قطع کرتا ہے جو زاویے کے اضلاع محیط میں ہے ۔

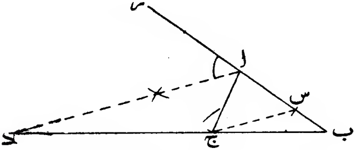


مفروض	فرض کرو اد △ ا ب ج کے زاویہ اؔ کا ناصف ہے ۔
مطلوب	ب د : د ج = ب ا : ا ج
عمل	خط ب س خط د ا کے ‖ کھینچو جو ج ا کو بڑھانے پر نقطہ س پر ملے ۔
ثبوت	∵ اد اور س ب ‖ ہیں اور ج ا س ان کا خطِ قاطع ہے ۔ ∴ ج اؔ د = ا سؔ ب (متناظرہ زاویے) پھر اد اور س ب ‖ ہیں اور ا ب ان کا خطِ قاطع ہے ۔ ∴ د اؔ ب = ا بؔ س (متبادلہ زاویے) مگر ج اؔ د = د اؔ ب (بروئے عمل) پس ا سؔ ب = ا بؔ س لہٰذا ا س = ا ب اب ا د ‖ ہے س ب کا پس $\frac{\text{ب د}}{\text{د ج}} = \frac{\text{س ا}}{\text{ا ج}} = \frac{\text{ب ا}}{\text{ا ج}}$ (فھو المطلوب)

مسئلہ 96

(اثباتی) (حصہ دوم)

مثلث کے کسی زاویے کا خارجی ناصف مقابل کے ضلعے کو خارجی طور پر اُسی نسبت میں قطع کرتا ہے جو زاویے کے اضلاعِ محیط میں ہے۔



مفروض — فرض کرو ا̂د △ اب ج بیرونی زاویہ ا کا ناصف ہے۔ جو ب ج کو بڑھانے پر نقطہ د پر ملتا ہے۔

مطلوب — ب د : ج د = ب ا : ا ج

عمل — خط ج س خط د ا کے ॥ کھینچو جو ا ب کو س پر ملے۔

ثبوت —

∵ ج س خط د ا ॥ ہیں اور ا ج اُن کا خطِ قاطع ہے۔

∴ ج ا̂ د = س ج̂ ا (متبادلہ زاویے)

پھر ج س اور د ا متوازی ہیں اور ب ا س اُن کا خطِ قاطع ہے۔

∴ س ا̂ د = ا س̂ ج (متقابلہ زاویے)

مگر ج ا̂ د = س ا̂ د (مفروض)

پس س ج̂ ا = ا س̂ ج

∴ ا س = ا ج

اب س ج اور ا د خط ॥ ہیں

∴ ب د : ج د = ب ا : س ا

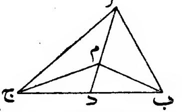
∴ ب د : ج د = ب ا : ا ج

∵ س ا = ا ج (ھوالمطلوب)

مشق 96

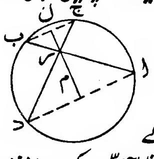
1 اگر کسی مثلث کا قاعدہ داخلی یا خارجی طور پر اضلاع کی نسبت میں تقسیم کیا جائے تو نقطۂ تقسیم کو راس سے ملانے والا خط راس کا داخلی یا خارجی ناصف ہوگا۔

2 △ ا ب ج کا وسطانیہ ا د قاعدے کو وسطی نقطہ د پر ملتا ہے و ط اور و ع زاویہ ا د ب اور ا د ج کے ناصف ا ب اور ا ج کو ط اور ع پر ملتے ہیں ثابت کرو خط ط ع خط ب ج کے ॥ ہے۔

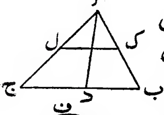


3 نقطہ م △ ا ب ج کا داخلی مرکز ہے اور ا م خط ب ج کو نقطہ د پر ملتا ہے۔ ثابت کرو ا م : م د = ا ب + ا ج : ب ج۔

4 اگر کسی چوکور میں دو متقابلہ زاویوں کے ناصف ایک وتر پر ملیں تو باقی متقابلہ زاویوں کے ناصف دوسرے وتر پر ملیں گے۔



5 دائرے کے دو متقاطع وتر ایک دوسرے کو اس طرح قطع کرتے ہیں کہ ایک کے حصوں کی نسبت دوسرے کے حصوں کی نسبت کے برابر ہے۔ ثابت کرو کہ متقابلہ حصوں کے درمیانی زاویے کا ناصف مرکز میں سے گزرے گا۔

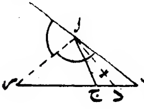


6 △ ا ب ج میں ا د زاویہ ب ا ج کا ناصف ہے ک ل خط ب ج کے ॥ کھینچا گیا ہے۔ جو باقی اضلاع کو ک اور ل پر ملتا ہے۔ ثابت کرو ب د : د ج = ب ک : ج ل۔

7 دو دائرے ایک دوسرے کو داخلی طور پر نقطہ ط پر مس کرتے ہیں ف ق بیرونی دائرے کا وتر اندرونی دائرے کو نقطہ س پر مس کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ ط ق : ط ف = ف س : س ق

8 ا ب ج اور ک ل م دو △ ہیں۔ جن میں ب̂ = ل̂ ان مساوی زاویوں کے ناصف متقابلہ اضلاع کو اسی نسبت میں قطع کرتے ہیں ثابت کرو کہ △ ا ب ج اور △ ک ل م متشابہ ہیں (مسائل 93، 96 سے مستنبط کرو)۔

نوٹ: اگر $\overline{\text{اد}}$ اور $\overline{\text{اس}}$ △ اب ج کے راسی زاویے کے داخلی اور خارجی ناصف ہوں اور $\overline{\text{بد}}$ = ک اور $\overline{\text{دج}}$ = ل



$\overline{\text{با}}$ = جَ ، $\overline{\text{اج}}$ = بَ اور $\overline{\text{جب}}$ = اَ

$$\text{تو}\ \frac{\text{ک}}{\text{ل}} = \frac{\text{جَ}}{\text{بَ}} \therefore \frac{\text{ک}}{\text{ک+ل}} = \frac{\text{جَ}}{\text{بَ+جَ}}$$

$$\text{یعنی}\ \frac{\text{ک}}{\text{اَ}} = \frac{\text{جَ}}{\text{بَ+جَ}}$$

$$\text{پس ک} = \frac{\text{اَ}\times\text{جَ}}{\text{بَ+جَ}}$$

$$\text{اسی طرح ل} = \frac{\text{اَ}\times\text{بَ}}{\text{بَ+جَ}} \text{، اگر}\ \overline{\text{جس}} = \text{م}$$

$$\frac{\text{اَ+م}}{\text{م}} = \frac{\text{جَ}}{\text{بَ}}$$

$$\frac{\text{اَ}}{\text{م}} = \frac{\text{جَ}-\text{بَ}}{\text{بَ}} \quad \text{یا م} = \frac{\text{اَ}\times\text{بَ}}{\text{جَ}-\text{بَ}}$$

$$\text{پس}\ \overline{\text{دس}} = \text{ل+م} = \frac{\text{اَ}\times\text{بَ}}{\text{بَ+جَ}} + \frac{\text{اَ}\times\text{بَ}}{\text{جَ}-\text{بَ}} = \frac{2\,\text{اَبَجَ}}{\text{جَ}^2-\text{بَ}^2}$$

تعریفات

1 اگر مقادیر ا ، ب ، ج ، د کی باہمی نسبت اس طرح کی ہو کہ ا : ب = ج : د تو د کو ا ، ب ، ج کا چوتھا متناسب کہتے ہیں ۔

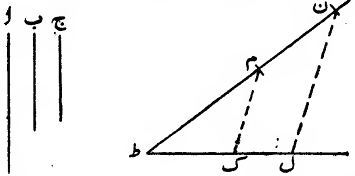
2 اگر ا : ب = ب : ج تو ج کو ا اور ب کا تیسرا متناسب کہتے ہیں ۔

3 اگر ا : ب = ب : ج تو ج کو ا اور ب کا وسط فی التناسب یا وسط نسبتی کہتے ہیں اور اس تناسب کا نام تناسب علی التوالی ہے ۔

4 اگر ایک خط مستقیم دو حصوں میں اس طرح تقسیم کیا جائے کہ سارے خط اور ایک حصے کی سطح دوسرے حصے پر کے مربع کے برابر ہو تو کہا جائے گا کہ خط کو طرفی و وسطی نسبت میں تقسیم کیا گیا ہے ۔

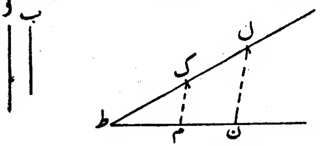
مسئلہ 97
(عملی)

تین دِیے ہُوئے خطُوط کا چوتھا مُتناسِب معلُوم کرو ۔



مفروض	فرض کرو تین خطُوط ا، ب، ج دِیے ہُوئے ہیں ۔
مطلوب	چوتھا مُتناسِب لا معلُوم کرنا اس طرح کہ ا : ب = ج : لا
عمل	(1) کوئی سے دو مُتقاطع خطُوط ط د اور ط س کھینچو ۔ (2) خط ط س پر ط م = ا ، م ن = ب کاٹو ۔ (3) خط ط د پر ط ک = ج کاٹو ۔ (4) م ک کو ملاؤ اور ن سے خط ن ل خط م ک کے ‖ کھینچو - جو ط د کو ل پر کاٹے ۔ (5) تب ک ل = لا چوتھا مُتناسِب ہو گا ۔
ثبوت	△ ط ن ل میں خط م ک خط ن ل کے ‖ ہے ۔ ∴ ط م : م ن = ط ک : ک ل یا ا : ب = ج : ک ل پس ک ل = لا چوتھا مُتناسِب ہے ۔ (فھو المطلوب)

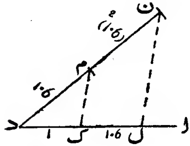
نتیجۂ صریح: دو دیے ہوئے خطوں کا تیسرا متناسب معلوم کرنا۔



سابقہ عمل دہراؤ۔ صرف $\overline{\text{طم}}$ کو ب کے برابر لو۔
پس ا : ب = ب : $\overline{\text{م ن}}$ یعنی $\overline{\text{م ن}}$ تیسرا متناسب مطلوبہ ہے۔

مشق 97

1 ہندسی شکل بنا کر 3، 4، 5 کا چوتھا متناسب معلوم کرنا۔ اور جواب کی پڑتال پیمائش سے کرو۔

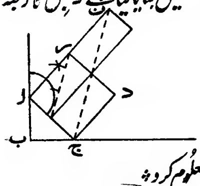


2 ایک خط 1.6 سم لمبا لو اور تشکیل سے $(1.6)^2$ سم طول کا خط معلوم کرو۔

3 تشکیل سے مقادیر ذیل کی قیمتیں معلوم کرو:-

(ا) $\frac{3.8\times 1.5}{5}$ (ب) $\frac{4.1}{3.1\times 2}$ (ج) $\frac{(3.9)^2}{2.5}$

4 سوال نمبر ۱۱ صفحہ 237 میں ایک مستطیل بنایا گیا ہے۔ جس کا رقبہ دیے ہوئے مستطیل کے برابر ہے۔ عمل کی صحت کا ثبوت دو۔



5 مستطیل بناؤ۔ جس کا رقبہ 2 مربع انچ اور ایک ضلع 2.9 ہو۔

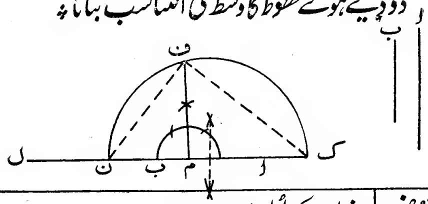
6 ہندسی طریق سے 2.5 سم، 2 سم اور 3.7 سم کا چوتھا متناسب معلوم کرو۔

7 ہندسی طریق سے 3 سم اور 4 سم کا تیسرا متناسب معلوم کرو۔

مسئلہ 98

(عملی)

دو دیے ہوئے خطوط کا وسط فی التّناسب بنانا ۔



مفروض

دو خط جن کے طُول ا ، ب ہیں ۔

مطلوب

ایک خط = لا ایسا بنانا ہے کہ

ا : لا :: لا : ب

عمل

کوئی خط ک ل لو اور اس پر ک م = ا کاٹو اور م ن = ب کاٹو۔
ک ن کو قطر مان کر اس پر نصف دائرہ ک ف ن بناؤ۔
م سے خط م ف کھینچو جو ک ن پر عمود ہو اور دائرے کو نقطہ ف پر ملے۔ ف م مطلوبہ وسط فی التّناسب ہوگا ۔

ثبوت

ف ک اور ف ن کو ملاؤ۔

ک ف̂ ن = 90° (نصف دائرے کا زاویہ)

ک̂ = 90° − ک ف̂ م = ن ف̂ م

نیز ک م̂ ف = ن م̂ ف (قائمے)

پس △ن ک ف م، ف م ن متساوی الزّوایا اور متشابہ ہیں۔

∴ ک م : م ف :: م ف : م ن

یعنی ا : م ف :: م ف : ب

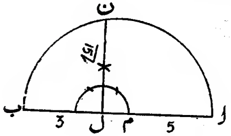
پس م ف خط ا اور ب کا وسط فی التناسب ہے

(فہو المطلوب)

مشق 98

1 ہندسی عمل سے 2.5 اور 1.6 کا وسطِ فی التّناسُب معلوم کرو ؛

2 دو خطوط کی لمبائی 4 گز اور $2\frac{1}{4}$ گز ہے۔ اُن کا وسطِ فی التّناسُب بتاؤ۔ پیمائش سے جواب بتاؤ اور جواب کی پڑتال کرو ؛



3 $\frac{1}{3}$ اور 3 کا وسطِ فی التّناسُب ہندسی شکل سے معلوم کرو ؛

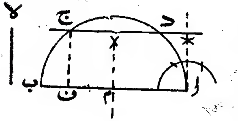
4 ہندسی طریق سے 15 کا جذر نکالو ؛

5 ہندسی طریق سے ایک خط بناؤ جس کا طول $\sqrt{8}$ سم ہو ؛

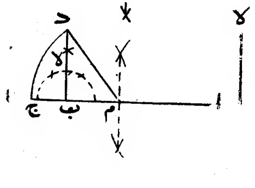
6 ہندسی طریق سے مندرجۂ ذیل کے جذر نکالو:-

(1) 18 (2) 20 (3) 42 (4) 31 (5) 41 (6) 2.9

[اشارہ: $31 = 6.2 \times 5$ ، $2.9 = 2.9 \times 1$]



7 ایک خط اب کو اندرونی طور پر اس طرح تقسیم کرو کہ دونوں حصّوں کی سطحِ کسی دیے ہوئے مربع کے برابر ہو ؛

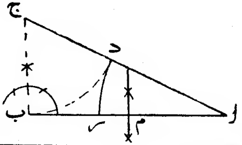


8 دیے ہوئے خط اب کو بیرونی طور پر اس طرح تقسیم کرو کہ دونوں ٹکڑوں کی سطحِ کسی دیے ہوئے مربع کے برابر ہو ؛

مسئلہ 99

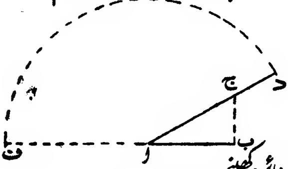
(عملی)

کسی دیے ہوئے خط کو طرفی و وسطی نسبت میں تقسیم کرنا ۔



مفروض	فرض کرو خط $\overline{\text{اب}}$ دیا ہوا ہے ۔
مطلوب	$\overline{\text{اب}}$ کو س پر اس طرح تقسیم کرنا ہے کہ $\overline{\text{اس}}^2 = \overline{\text{اب}} \times \overline{\text{سب}}$
عمل	(۱) $\overline{\text{اب}}$ کی تنصیف نقطہ م پر کرو ۔ (2) $\overline{\text{ب ج}}$ کو $\overline{\text{اب}}$ پر عموداً کھینچو اور $\overline{\text{ب ج}}$ کو $\overline{\text{م ب}}$ کے مساوی لو ۔ (3) $\overline{\text{اج}}$ کو ملاؤ ۔ (4) $\overline{\text{ج ا}}$ سے $\overline{\text{ج د}} = \overline{\text{ج ب}}$ کاٹو ۔ (5) $\overline{\text{اب}}$ سے $\overline{\text{اس}} = \overline{\text{اد}}$ کاٹو ۔ تب خط $\overline{\text{اب}}$ نقطہ س پر اس طرح تقسیم ہوگا کہ $\overline{\text{اس}}^2 = \overline{\text{اب}} \times \overline{\text{سب}}$
ثبوت	اب ج قائم الزاویہ مثلث ہے ۔ $\therefore \overline{\text{اج}}^2 = \overline{\text{اب}}^2 + \overline{\text{ب ج}}^2$ مگر $\overline{\text{اج}} = \overline{\text{اد}} + \overline{\text{دج}} = \overline{\text{اس}} + \frac{\overline{\text{اب}}}{2}$ اور $\overline{\text{ب ج}} = \overline{\text{م ب}} = \frac{\overline{\text{اب}}}{2}$ پس $\left(\overline{\text{اس}} + \frac{\overline{\text{اب}}}{2}\right)^2 = \overline{\text{اب}}^2 + \left(\frac{\overline{\text{اب}}}{2}\right)^2$ یا $\overline{\text{اس}}^2 + \overline{\text{اس}} \times \overline{\text{اب}} = \overline{\text{اب}}^2$ پس $\overline{\text{اس}}^2 = \overline{\text{اب}}^2 - \overline{\text{اس}} \times \overline{\text{اب}}$ $= \overline{\text{اب}}\,(\overline{\text{اب}} - \overline{\text{اس}})$ $= \overline{\text{اب}} \times \overline{\text{سب}}$ (فھو المطلوب)

نتیجۂ صریح: کسی خطِ مستقیم کو خارجی طَور پر طرفی اور وسطی نسبت میں تقسیم کرنا۔



عمل: $\overline{\text{بج}}$ کو $\overline{\text{اب}}$ پر عمُوداً کھینچو۔ اور $\overline{\text{بج}}$ کو $\frac{1}{2}\overline{\text{اب}}$ کے برابر لو۔ $\overline{\text{اج}}$ کو مِلاؤ۔ اور اس کو د تک بڑھاؤ تاکہ $\overline{\text{جد}}$ برابر ہو $\overline{\text{بج}}$ کے۔ ا کو مرکز مان کر $\overline{\text{اد}}$ نصف قطر سے دائرہ کھینچو۔ جو $\overline{\text{با}}$ کو بڑھانے سے ف پر ملے۔ تو ف مطلوبہ نقطۂ تقسیم ہوگا۔

ثبوت: اب ج ایک قائم الزّاویہ مثلّث ہے۔

$$\therefore \overline{\text{اج}}^2 = \overline{\text{اب}}^2 + \overline{\text{بج}}^2$$

مگر $\overline{\text{اج}} = \overline{\text{اد}} - \overline{\text{جد}}$ ، $\overline{\text{اد}} = \overline{\text{اف}}$ اور $\overline{\text{جد}} = \overline{\text{بج}} = \frac{1}{2}\overline{\text{اب}}$

$$\therefore (\overline{\text{اد}} - \overline{\text{جد}})^2 = \overline{\text{اب}}^2 + \overline{\text{بج}}^2$$

$$\text{یا } \left(\overline{\text{اف}} - \frac{\overline{\text{اب}}}{2}\right)^2 = \overline{\text{اب}}^2 + \left(\frac{\overline{\text{اب}}}{2}\right)^2$$

$$\therefore \overline{\text{اف}}^2 + \frac{\overline{\text{اب}}^2}{4} - 2\overline{\text{اف}} \times \frac{\overline{\text{اب}}}{2} = \overline{\text{اب}}^2 + \frac{\overline{\text{اب}}^2}{4}$$

$$\text{یا } \overline{\text{اف}}^2 - \overline{\text{اف}} \times \overline{\text{اب}} = \overline{\text{اب}}^2$$

$$\therefore \overline{\text{اف}}^2 = \overline{\text{اب}}^2 + \overline{\text{اف}} \times \overline{\text{اب}} = \overline{\text{اب}}\,(\overline{\text{اب}} + \overline{\text{اف}})$$

$$= \overline{\text{اب}} \times \overline{\text{بف}} \quad [\overline{\text{اب}} + \overline{\text{اف}} = \overline{\text{بف}}]$$

(فہوالمطلوب)

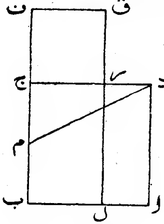
مشق 99

1 3.4 گز لمبے خط کو طرفی اور وسطی نسبت میں تقسیم کرو اور پیمائش سے جواب کی پڑتال کرو۔

2 6 سم لمبے خط کو داخلی طَور پر طرفی اور وسطی نسبت میں تقسیم کرو۔ بڑے حصّے کو ناپو۔ نیز اُس کا طُول جبری طریق سے معلوم کرو۔

3 2 گز لمبے خط $\overline{\text{اب}}$ کو ج تک بڑھاؤ۔ اس طرح کہ $\overline{\text{اج}} \times \overline{\text{بج}} = \overline{\text{اب}}^2$

4 طرفی اور وسطی نسبت میں تقسیم کرنے کا مندرجۂ ذیل قاعدہ ثابت کرو :-



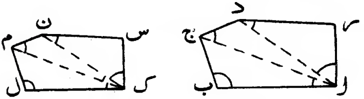
دج پر مربع اب ج د بناؤ -
ب ج کی تنصیف نقطہ م پر کرو -
اور م د کو ملاؤ - م ج کو ف تک
بڑھاؤ تا آنکہ م ف = م د
ج ف پر مربع ج ف ق ر بناؤ -
تب ر مطلوبہ نقطۂ تقسیم ہوگا ؛

5 . ایک خط کو دو حصوں میں اس طرح تقسیم کرو کہ کل خط اور اس کے ایک حصے پر کے مربعوں کا مجموعہ دوسرے حصے پر کے مربع سے تین گنا ہو ؛

مسئلہ 100

(عملی)

کسی دیے ہوئے خط پر ایسی شکل بنانا جو کسی دی ہوئی مُستقیمۃُ الاضلاع شکل کے مُتشابہ ہو ؏



معلوم — فرض کرو اب دیا ہوا خط اور ک ل م ن س دی ہوئی مُستقیمۃُ الاضلاع شکل ہے ؏

مطلوب — اب پر شکل بنانا جو ک ل م ن س سے مُتشابہ ہو ؏

عمل —
(1) ک م اور ک ن کو ملاؤ ؏
(2) اب کے نقاط ا، ب پر ب اج اور ا ب ج بناؤ۔ جو علی الترتیب ل ک م، ک ل م کے برابر ہوں ؏
(3) اج کے نقاط ا، ج پر ج اد اور ا ج د بناؤ۔ جو علی الترتیب م ک ن اور ک م ن کے برابر ہوں ؏
(4) اسی طرح د اہ اور ا د ہ زاویہ ہائے ن ک س، ک ن س کے برابر بناؤ تب اب ج د ہ مطلوبہ شکل ہوگی ؏

ثبوت — بروئے عمل △ن اب ج، ک ل م، △ن ا ج د، ک م ن اور △ن ا د ہ، ک ن س مُتساوی الزّوایا ہیں۔ لہٰذا مُتشابہ ہیں۔

$$\text{پس}\ \frac{\text{اب}}{\text{کل}} = \frac{\text{بج}}{\text{لم}} = \frac{\text{اج}}{\text{کم}}\text{،}\ \frac{\text{اج}}{\text{کم}} = \frac{\text{جد}}{\text{من}} = \frac{\text{اد}}{\text{کن}}$$

$$\text{اور}\ \frac{\text{اد}}{\text{کن}} = \frac{\text{دہ}}{\text{نس}} = \frac{\text{ہا}}{\text{سک}}$$

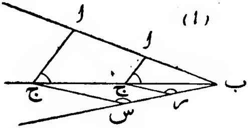
$$\text{پس}\ \frac{\text{اب}}{\text{کل}} = \frac{\text{بج}}{\text{لم}} = \frac{\text{جد}}{\text{من}} = \frac{\text{دہ}}{\text{نس}} = \frac{\text{ہا}}{\text{سک}}$$

نیز اب ج د ہ اور ک ل م ن س مُتساوی الزّوایا ہیں (بروئے عمل)
پس دونوں شکلیں مُتشابہ ہیں ؏ (فہو المطلوب)

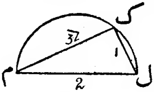
مشق 100

1 ایک مثلّث بناؤ جو ایک دیے ہُوئے مثلّث کے مُتشابہ ہو۔ اور رقبے میں
اُس سے سہ چند ہو ؎

(1)



(2)



2 ایک ایسے دائرے کے اندر جس کا نصف قُطر 2 سم ہو۔ ایک مُنتظم مُسدّس بناؤ
اس مُسدّس کے مُتشابہ ایک اور مُسدّس 3.5 سم لمبے خط پر بناؤ ؎

3 ایک چار ضلعی شکل ا ب ج د بناؤ۔ جس میں $\hat{ا}$ = 75°، $\overline{اب}$ = 5 سم
$\overline{ب ج}$ = 4 سم، $\overline{ج د}$ = 4.5 سم اور $\overline{د ا}$ = 3.6 سم۔ ایک اور خط
$\overline{ف ق}$ 2 سم لمبا لو اور اُس پر اُس کے مُتشابہ شکل بناؤ ؎

4 مُتشابہ شکلوں کی نسبت اُن کے مُتناظرہ وتروں کے مُربّعوں کی نسبت کے
برابر ہوتی ہے ؎

5 مُتشابہ شکلوں کی نسبت اُن کے مجموعتہُ الاضلاع کے مُربّعوں کی نسبت
کے برابر ہوتی ہے ؎

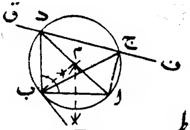
6 ایک دی ہُوئی کثیرُ الاضلاع کے مُتشابہ ایک اور کثیرُ الاضلاع بناؤ۔ جس
کا رقبہ معلومہ کثیرُ الاضلاع سے چوگُنا ہو ؎

[اشارہ: مُتشابہ شکلوں کے رقبوں میں اُن کے مُتناظرہ ضلعوں پر کے
مُربّعوں کے برابر نسبت ہوتی ہے]

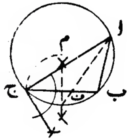
∴ ان کے اضلاع کی نسبت = 2 : 1
پس مطلوبہ کثیرُ الاضلاع کا ہر ضلع معلومہ کثیرُ الاضلاع کے ہر ضلعے کا
دُگنا لو ؎

امتحانی سوالات نمبر 5

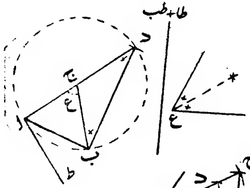
1 ایک مثلث بناؤ۔ جس کا قاعدہ = 1.9″، راسی زاویہ = $67\frac{1}{2}^\circ$
اور ایک ضلع = 1.8″ ہو۔



2 ایک مثلث بناؤ۔ جس کا قاعدہ اور راسی زاویہ دیا ہُوا ہو اور راس ایک خطِ معلومہ پر واقع ہو۔ اُس وقت کیا ہوگا۔ جب راس کا طریق النقاط دائرے کا مماس ہو اور کس حالت میں یہ شکل ناممکن العمل ہوگی؟

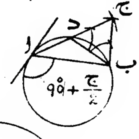


3 ایک مثلث بناؤ۔ جس کا قاعدہ راسی زاویہ اور راسی زاویے کے ناصف کا قاعدے کے ساتھ نقطۂ تقاطع دیا ہُوا ہے۔

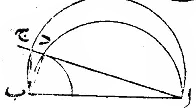


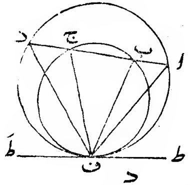
4 ایک مثلث بناؤ۔ جس کا قاعدہ باقی دو اضلاع کا مجموعہ اور راسی زاویہ معلوم ہو۔

5 ایک مثلث بناؤ۔ جس کا قاعدہ باقی دو اضلاع کا فرق اور راسی زاویہ دیا ہُوا ہو۔

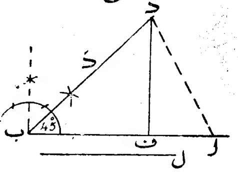


6 ایک مثلث بناؤ جس کا قاعدہ راسی زاویہ اور قاعدے کے ایک سرے سے مقابل کے ضلع پر عمود دیا ہُوا ہو۔

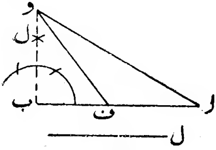




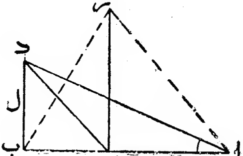
7 دو دائرے ایک دوسرے کو اندرونی طور پر مس کرتے ہیں اور ایک خط اُن دونوں کو کاٹتا ہؤا کھینچا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ خط کے وُہ حصّے جو دونوں دائروں کے درمیان واقع ہیں۔ نقطۂ تماس پر مساوی زاویے بناتے ہیں۔



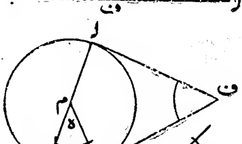
8 ایک خط کو دو ایسے حصّوں میں تقسیم کرو۔ جن کے مُربّعوں کا مجموعہ ایک اور دیئے ہوئے خط ل کے مُربّعے کے برابر ہو۔



9 ایک خط کو دو ایسے حصّوں میں تقسیم کرو جن کے مُربّعوں کا فرق ایک دیئے ہوئے خط ل کے برابر ہو۔



10 ایک مثلّث کے قاعدے کی مقدار اور مقام دیا ہؤا ہے۔ اور اس کے باقی ضلعوں پر کے مُربّعوں کا فرق بھی معلوم ہے۔ اس کے راس کا طریق النّقاط معلوم کرو۔

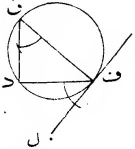


11 ایک دائرے کے دو مماس کھینچو جو ایک دوسرے کے ساتھ دیا ہؤا زاویہ بنائیں۔

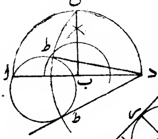
12 ایک دی ہوئی چار ضلعی شکل کے مُشابہ ایک شکل بناؤ۔ جس کے اضلاع ایک دیئے ہوئے دائرے

کے مماس ہوں ۔

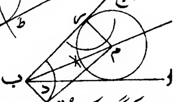
13 کسی دائرے کا مرکز معلوم کیے بغیر اس کے محیط پر ایک دیے ہوئے نقطے ف سے مماس کھینچو ۔



14 کسی دائرے کا مرکز معلوم کیے بغیر ایک بیرونی نقطہ سے مماس کھینچو ۔

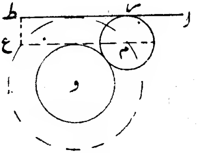


15 دو متقاطع خطوطِ مستقیم کے درمیان 45° کا زاویہ ہے اُن کو مس کرتا ہوا ایک دائرہ کھینچو ۔ جس کا نصف قطر 1.5 سم ہو ۔



16 اُ نصف قطر کا ایک دائرہ کھینچو اور اس کے گرد ایک متساوی الاضلاع مثلث بناؤ ۔ نیز اس دائرے کا ایک ایسا مماس کھینچو جو اس مثلث کے ایک ضلع کے ساتھ 30° کا زاویہ بنائے ۔

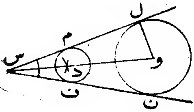
17 $\frac{1}{2}$ سم نصف قطر کا ایک دائرہ کھینچو جو ایک معلومہ خطِ مستقیم اب اور ایک دیے ہوئے دائرے کو مس کرتا ہوا گزرے ۔



18 فط اور فظ ایک دائرے کے دو مماس ہیں جو ایک بیرونی نقطہ ف پر ملتے ہیں ۔ دائرے کا مرکز و ہے ۔ ثابت کرو کہ فو ، طظ کا علی القوائم ناصف ہے اور ف ط ظ ایک پتنگ ہے ۔ جس میں فو محورِ تشاکل ہے ۔

19 دو متقاطع خطوط کو مس کرنے والے دائروں کے مرکز ان خطوط کے درمیانی زاویے کے ناصف پر واقع ہوں گے ۔

20 اگر دو غیر مساوی دائروں کے خارجہ مشترک خطوط مماس بڑھائے جانے پر آپس میں ایک دوسرے کو قطع کریں تو وہ نقطۂ تقاطع دائروں کے مرکزوں



میں سے گزرنے والے خط پر واقع ہوگا اور اُسے نصف قطروں کی نسبت میں بیرونی طور پر تقسیم کرے گا ؀

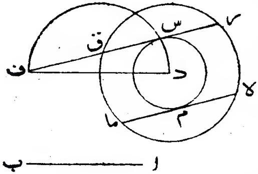
21 دو دائرے جن کے نصف قطر ا اور ب کے برابر ہیں۔ ایک دوسرے کو بیرونی طور پر مس کرتے ہیں۔ ثابت کرو کہ اُن کے مشترک مماس کا طول $2\sqrt{\text{ا} \times \text{ب}}$ ہوگا ؀

22 ثابت کرو کہ دو دائروں کے مستقیم مشترک خطِ مماس کا طول $\sqrt{\text{ف}^2 - (\text{ا} - \text{ب})^2}$ ہوگا۔ جب ا اور ب اُن کے نصف قطر اور ف مراکز کا باہمی فاصلہ ہو ؀

23 ثابت کرو کہ دو دائروں کے معکوس مشترک خطِ مماس کا طول $\sqrt{\text{ف}^2 - (\text{ا} + \text{ب})^2}$ ہوگا۔ جب ا اور ب اُن کے نصف قطر اور ف مراکز کا باہمی فاصلہ ہو ؀

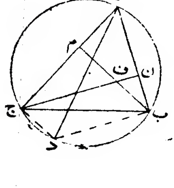
24 اگر دو دائرے ایک دوسرے کو بیرونی طور پر مس کریں تو ثابت کرو کہ ان کا مستقیم مماس مشترک نقطۂ مماس پر زاویہ قائمہ بناتا ہے ؀

25 ایک دیے ہوئے نقطہ ف سے ایک خط کھینچو جو دیے ہوئے دائرے کو جس کا مرکز د ہے ق اور س پر اس طرح قطع کرے کہ ق س ایک دیے ہوئے خط اب کے برابر ہو ؀



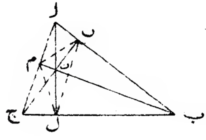
26 ثابت کرو کہ دائرہ محیط کا مرکز
(1) حادۃ الزوایا مثلث کے اندر
(2) قائمۃ الزاویہ مثلث کے وتر پر اور
(3) منفرجۃ الزاویہ مثلث کے باہر واقع ہوتا ہے ؀

27 اب ج ایک مثلث ہے اور اد اُس کے دائرۂ محیط کا قطر ب م اور ج ن عمود ہیں۔ جو نقطہ ف پر ایک دوسرے کو کاٹتے ہیں ثابت کرو کہ ب د ج ف ایک متوازی الاضلاع ہے ؀

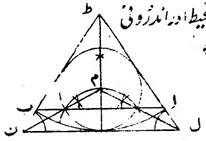


28 ایک مُساوی الاضلاع مثلّث میں دائرۂ محیط اور اندرُونی دائرہ ہم مرکز ہوں گے ۔

29 ایک مثلّث ا ب ج میں نُقطہ ف جو اس کے عمُود ال، ب م اور ج ن کا نقطۂ تقاطُع ہے ۔ مثلّث ل م ن کے اندرُونی دائرے کا مرکز ہو گا ۔



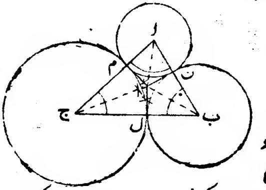
30 ایک قائمۃ الزّاویہ مثلّث میں زاویہ قائمہ بنانے والے اضلاع کا مجمُوعہ دائرۂ محیط اور اندرُونی دائرے کے قطروں کے مجمُوعے کے برابر ہوگا ۔



31 کسی دائرے کے ایک قطاع کے اندر ایک دائرہ بناؤ ۔

32 مسئلہ نمبر 87 کی شکل میں ثابت کرو کہ اب + ب د = اط = اج + ج د = ای = ص ۔

33 تین دائرے ایک دُوسرے کو مس کرتے ہُوئے اس طرح کھینچو کہ اُن کے مرکز ایک دیے ہُوئے مثلّث کے راسوں پر واقع ہوں ۔



34 اگر م کسی مثلّث کا نصف احاطہ ہو اور طا، طب، طج اس کے اضلاع ب ج، ج ا اور ا ب کو ظاہر کریں اور ہا اس کے خارجی دائرے کا جو ب ج کو مس کرتا ہے نصف قطر ہو وغیرہ تو ثابت کرو :۔

$$\text{ہا} = \frac{\triangle}{\text{م} - \text{طا}}،\quad \text{ہ}_2 = \frac{\triangle}{\text{م} - \text{طب}} \text{ اور } \text{ہ}_3 = \frac{\triangle}{\text{م} - \text{طج}}$$

35 کسی مثلّث کا وسطانیہ جس ضلع کی تنصیف کرتا ہے ۔ اُس ضلع کے متوازی ہر خط کی تنصیف کرے گا ۔

36 ا، ب، ج، د کسی چوکور کے اضلاع کے نقاطِ تنصیف ہیں ۔ ثابت کرو ۔

(۱) اب ج د ایک ||ع ہے ۔

(2) اج اور ب د ایک دوسرے کی تنصیف کرتے ہیں ۔

37 اب ج ایک قائمۃ الزاویہ مثلث ہے جس کا قائمہ زاویہ آ ہے ۔ ان،
ب ج پر عمود ہے ۔ ب ک زاویہ ب کا ناصف ہے اور آج کو ک پر ملتا ہے اور
ان کو ل پر ۔ ثابت کرو کہ ال : ن ل = ج ک : ک ا ؎

38 اب ج د ایک چوکور ہے ۔ ف، ق، ر اور ص اُس کے اضلاع اب،
ب ج، ج د اور د ا کے وہ نقطہ ہائے تثلیث ہیں جو ا یا ج کے متصل ہوں ۔
ثابت کرو کہ ف ق ر ص ایک ||ع ہے ؎

39 ایک مثلث و ب د میں ایک نقطہ ج اس کے ضلع و ب کو بڑھا کر اس پر
لیا گیا ہے ۔ ج ی، ب د کے متوازی کھینچا گیا ہے جو بڑھے ہوئے د و کو ی پر
قطع کرتا ہے اور د ا، ب ی کے متوازی ہے جو و ب کو ا پر ملتا ہے ۔ ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{وا}}{\text{وب}} = \frac{\text{وب}}{\text{وج}}$$

40 △ اب ج کے ضلع اب پر د اور ی اس طرح لیے گئے ہیں کہ اد = ب ی
نقطہ د میں سے ایک خط ب ج کے || کھینچا گیا ہے جو اج کو ف پر ملتا ہے اور
ی میں سے ایک خط اج کے || کھینچا گیا ہے جو ب ج کو ق پر ملتا ہے ۔ ثابت کرو کہ
ف ق، اب کے متوازی ہے ؎

41 اد △ اب ج کا وسطانیہ ہے اور ق اُس کا مرکزِ ثقل ی، اج کا نقطہ
تنصیف ہے ۔ ق ک، د ی کے متوازی کھینچا گیا ہے ۔ جو اج کو ک پر ملتا
ہے ثابت کرو کہ ی ک $= \frac{1}{6}$ اج

42 اگر دو دائرے جن کے نصف قطر $ر_1$ اور $ر_2$ ہیں ۔ نقطہ ا پر اندرونی طور سے
مس کریں اور اف ق ان کا کوئی وتر ہو جو ان کے محیطوں کو ف اور ق پر کاٹتا
ہے تو ثابت کرو کہ $\frac{\text{اف}}{\text{اق}} = \frac{ر_1}{ر_2}$ ؎

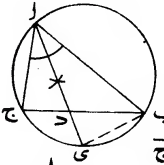
43 مثلث اب ج کے ضلع ب ج میں کوئی نقطہ د لے کر اس میں سے
اضلاع اج اور اب کے || خطوط د ی اور د ف کھینچو جو اب کو ی

اور اج کو ف پر ملیں۔ ی ف کے نقطۂ تنصیف کا طریق النقاط معلوم کرو ۔

44 تین متوازی خطوط ہر دو خطوط کو متناسب حصوں میں قطع کرتے ہیں ۔

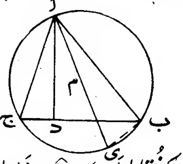
45 اب ج اور ب ج د کسی خط ب ج کے ایک ہی طرف دو △ بنائے گئے ہیں ۔ ی ۔ ب ج کا نقطۂ تنصیف ہے ۔ ی ف || ب د اور ج د کو ف پر ملتا ہے اور ی ق || اب اور اج کو ق پر ملتا ہے ۔ ی ح || ج د جو ب د کو ح پر ملتا ہے ۔ اور ی ک || اج جو اب کو نقطۂ ک پر ملتا ہے ۔ ثابت کرو کہ ف ق || ک ح ۔

46 اب ج ایک مثلث ہے ۔ زاویہ ا کا ناصف ب ج کو د پر ملتا ہے ۔ اور دائرۂ محیط کو ی پر



ثابت کرو کہ مثلث ی اب ، ج اد متشابہ ہیں ۔
پس ثابت کرو کہ :۔
(i) اب × اج = ای × اد
(ii) اب × اج = اد² + ب د × د ج

47 مثلث اب ج میں اد ⊥ ب ج اور ای دائرۂ محیط کا قطر ہے ۔ ثابت کرو کہ اب × اج = اد × ای ۔



48 چوکور اب ج د کے اندر کوئی نقطہ و ہے ۔ خطوط و ا ، و ب ، و ج اور و د کو نقاط اَ ، بَ ، جَ ، دَ پر اس طرح تقسیم کیا گیا ہے

وَاَ / وا = وبَ / وب = وجَ / وج = ودَ / ود = 2/3 ثابت کرو کہ

اب || اَبَ وغیرہ یہ بھی ثابت کرو کہ :۔
دَ اَ بَ = د ا ب وغیرہ اور اَ بَ جَ دَ متشابہ ہے اب ج د کے ۔

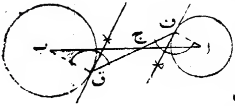
49 △ اب ج میں زاویہ ا کا بیرونی ناصف ب ج کو د پر اور دائرۂ محیط کو ی پر ملتا ہے ۔ ثابت کرو کہ :۔

اب × ب ج = ای × اد ۔

50 △ اب ج کا قاعدہ ب ج دونوں طرف د اور ی تک بڑھایا گیا ہے اگر اب² = د ب × ج ی تو ثابت کرو کہ △ن ی ا ج، ا د ب متشابہ ہیں ۔

51 △ اب ج میں ع اندرونی مرکز ہے۔ اگر اع بڑھا کر دائرۂ محیط کو و پر ملے تو ثابت کرو کہ و △ ب ع ج کے دائرۂ محیط کا مرکز ہے ۔

52 ا اور ب دو دائروں کے مرکز ہیں اور ج، اب کو ان کے نصف قطروں کی نسبت میں تقسیم کرتا ہے۔ ج میں سے کوئی خط دائروں کو ف اور ق پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ ج۔ ف ق کو بھی نصف قطروں کی نسبت میں تقسیم کرے گا اور ف اور ق پر کے مماس آپس میں متوازی ہوں گے ۔

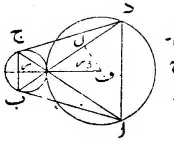


53 اب ج د ایک متوازی الاضلاع ہے۔ ا ف ر نقطہ ا میں سے کوئی خط ہے۔ جو وتر ب د کو ف پر۔ ب ج کو ق پر اور د ج کو بڑھا کر ر پر ملتا ہے تو ثابت کرو کہ اف² = ف ر × ف ق

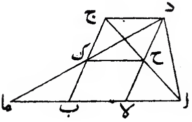
54 اب ج د ایک متوازی الاضلاع ہے۔ ضلع اب پر کوئی نقطہ ف ہے۔ د ف، اج کو ق پر قطع کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ $\frac{\text{اف}}{\text{اب}} = \frac{\text{ف ق}}{\text{د ق}}$

55 اف ب اور اق ب دو دائرے ہیں۔ ف ا ق ایک خط مستقیم ہے۔ ثابت کرو کہ $\frac{\text{ب ف}}{\text{ب ق}}$ دائروں کے نصف قطروں کی نسبت کے برابر ہے ۔

56 ایک چوکور اب ج د کے وتر اج اور ب د ایک دوسرے کو ر پر کاٹتے ہیں۔ دائرہ ا ر د کا نصف قطر دائرہ ب ر ج کے نصف قطر سے دگنا ہے۔ ثابت کرو کہ اد = ۲ ب ج



57 اب اور ج د ذوزنقہ اب ج د کے متوازی الاضلاع ہیں۔ کوئی خط جو اب کے متوازی ہے۔ ج ا اور ب ج کو نقاط ح اور ک میں کاٹتا ہے۔ د ح اور د ک۔ اب کو لا اور ما میں کاٹتے ہیں۔ ثابت کرو کہ اب = لا ما ۔



58 نصف دائرہ اب ف کا قطر اب اور مرکز ج ہے۔ ن، ج ب پر کوئی نقطہ ہے اور اب، ط تک اس طرح بڑھایا گیا ہے کہ:-

$\frac{\text{اط}}{\text{اج}} = \frac{\text{ان}}{\text{جن}}$ اور ف ط نقطہ ف سے خطِ مماس ہے۔ ثابت کرو کہ ج ن̂ ف ایک قائمہ زاویہ ہے۔

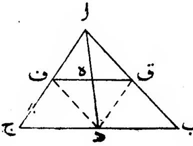
59 کسی چوکور اب ج د کے اضلاع اب، ب ج، ج د اور د ا پر نقاط ف، ق، س اور ص اس طرح لیے گئے ہیں کہ:-

$\frac{\text{اف}}{\text{اب}} = \frac{\text{جق}}{\text{جب}} = \frac{\text{جس}}{\text{جد}} = \frac{\text{اص}}{\text{اد}}$ ثابت کرو کہ ف ق س ص ایک ||ع ہے۔

60 ثابت کرو کہ متشابہ △ن کی نسبت ان کے متناظرہ وسطانیوں پر کے مربعوں کی نسبت کے برابر ہے۔

61 ثابت کرو کہ متشابہ △ن کی نسبت ان کے دائرہ ہائے محیط کے متناظرہ قطروں کے مربعوں کی نسبت کے برابر ہے۔

62 د، ف اور ق کسی مثلث کے اضلاع ب ج، ج ا اور اب کے نقطہ ہائے تنصیف ہیں۔ ثابت کرو کہ ا د اور ف ق نقطہ ہ پر ایک دوسرے کی تنصیف کرتے ہیں اور د ہ = $\frac{1}{2}$ ج د ۔

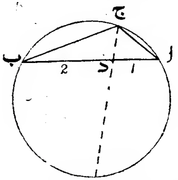


63 ایک مُساوی الاضلاع مثلّث کے راسوں سے مُقابل کے اضلاع پر عمُود گرائے گئے ہیں۔ اِن عمُودوں کے پائے مِلا کر ایک اور مثلّث بنایا گیا ہے۔ ہر دو △ن کے رقبوں کا مُقابلہ کرو ؛

64 سوال نمبر 62 کی شکل میں اگر وسطانیے ج ق اور ا د نقطہ ک پر ملیں تو ثابت کرو کہ ک ہر دو وسطانیوں کا ایک نقطۂ تثلیث ہے۔ پس ثابت کرو کہ △ کے تینوں وسطانیے ہم نقطہ ہوتے ہیں یہ بھی ثابت کرو کہ △ن ک ا ب، ک ا ج اور ک ب ج رقبہ میں برابر ہیں ؛

65 ل، م، ن کسی مثلّث ا ب ج کے راسوں ا، ب، ج سے مُقابل کے اضلاع پر پائے عمُود ہیں۔ ا ل، م ن کو ف پر کاٹتا ہے۔ ثابت کرو کہ :-

$$\frac{\text{ن ل}}{\text{ل م}} = \frac{\text{ن ف}}{\text{ف م}}$$



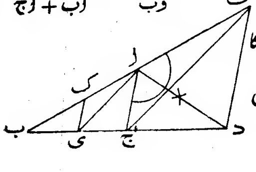
66 ا ج ب کسی دائرے کی قوس ہے۔ ج کا محلِ وقوع معلوم کرو جب وتر ب ج وتر ا ج سے دُگنا ہو ؛

67 کسی مثلّث کا قاعدہ اور راسی زاویہ دیا ہُوا ہے۔ اُس کے وسطانیوں کے نقطۂ تقاطع کا طریق النقاط معلوم کرو ؛

68 کسی مثلّث ا ب ج کے زوایا ب اور ج کے خارجی ناصف ب ک اور ج ف مقابل کے اضلاع کو ک اور ف پر ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ اگر ف ک ‖ ب ج تو مثلّث متساوی الساقین ہوگا ؛

69 ا د مثلّث ا ب ج کے زاویہ ا کا ناصف ہے جو قاعدے کو د پر ملتا ہے اور و قاعدے کا نقطۂ تنصیف ہے۔ ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{و د}}{\text{و ب}} = \frac{\text{ا ب} - \text{ا ج}}{\text{ا ب} + \text{ا ج}}$$



70 ا د مثلّث ا ب ج کے زاویہ ا کا خارجی ناصف قاعدہ ب ج (بڑھے ہوئے) کو د پر ملتا ہے۔ ی قاعدے کا نقطۂ تنصیف ہے۔

نقطہ ج میں سے ایک خط جو ای کے متوازی ہے اب کو ف پر ملتا ہے اگر
ی ک ‖ د ف کھینچا جائے جو اب کو ک پر ملے تو ثابت کرو:۔
اک = اج ٭

71 مثلث اب ج کے زاویہ ا کا ناصف اس کے دائرۂ محیط کو ل پر ملتا ہے۔
ثابت کرو کہ ب ج × ال = ب ل (اب + اج)

72 ایک متدائر چوکور کے وتر ایک دوسرے کو زاویہ قائمہ پر کاٹتے ہیں۔ ثابت کرو
کہ متقابل اضلاع کے مستطیلوں کا مجموعہ چوکور کے رقبے سے دگنا ہوگا ٭

73 کسی مثلث اب ج کے اندر کوئی نقطہ د ہے۔ زوایائے ب د ج، ج د ا اور
د اب کے ناصف بالترتیب ب ج، ج ا اور اب کو ف، ق اور س
پر ملتے ہیں۔ ثابت کرو:۔

$$\frac{\text{ف ب}}{\text{ف ج}} \times \frac{\text{ق ج}}{\text{ق ا}} \times \frac{\text{س ا}}{\text{س ب}} = 1$$

74 نقطہ ف کسی مساوی الاضلاع مثلث اب ج کے دائرۂ محیط پر قوس خرد
ب ج پر واقع ہے۔ ثابت کرو ف ا = ف ب + ف ج ٭

75 اگر کسی مثلث کے راسی زاویے کا خارجی ناصف بڑھے ہوئے قاعدے کو ملے
تو اس کے اضلاع پر کا مستطیل اس کے قاعدے کے حصوں کے مستطیل اور
ناصف پر کے مربع کے فرق کے برابر ہوگا ٭

76 اب ج ایک قائم الزاویہ مثلث ہے۔ جس کا زاویہ قائمہ ب ہے۔ ب د ⊥
اج اور ی تک اس طرح بڑھایا گیا ہے کہ د ی تیسرا متناسب ہے۔
ب د اور د ج کا۔ ثابت کرو کہ △ ا د ی = △ ب د ج ٭

77 اب ج ایک قائمۃ الزاویہ مثلث کے زاویہ قائمہ ب کا ناصف قاعدے
کو ف پر اور دائرۂ محیط کو د پر ملتا ہے تو ب د اور ب ف کا مستطیل مثلث
کے رقبے سے دگنا ہوگا ٭

78 اگر ا : 5۔1 :: 5۔2 : 2۔1 ہو تو ا معلوم کرو اور شکل کی صحت کی الجبرے
کے قاعدے سے پڑتال کرو ٭

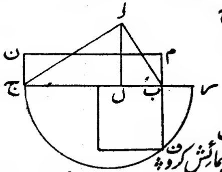
79 ایک معین بناؤ۔ جس کا ضلع 3 سم ہو اور ایک زاویہ °60 ہو۔ اس کے
مساوی رقبے کا ایک مستطیل بناؤ۔ جس کا ایک ضلع 5۔4 سم ہو ٭

80 ایک دیے ہوئے خط کو قاعدہ قرار دیتے ہوئے کسی مثلث معلوم سے مساوی رقبے کا ایک متساوی الساقین مثلث بناؤ ۔

81 کسی زاویے کے اندر یا باہر کوئی نقطہ لے کر اس میں سے ایک خط کھینچو جو زاویے کے بازوؤں کو ملے اور اس کے درمیانی حصے اس نقطے پر کسی دی ہوئی نسبت کے برابر ہوں ۔

82 ایک اا ع بناؤ۔ جس کے اضلاع 2.5 اور 2 سم ہوں اور اندرونی زاویہ °45 کا ہو۔ ایک خط 1.8 سم لمبا قاعدہ لے کر اس کے برابر ایک مستطیل بناؤ ۔

83 ایک منفرجۃ الزاویہ مثلث ا ب ج بناؤ۔ جس میں ا سے $\overline{\text{ب ج}}$ پر کا عمود 4 سم اور اضلاع $\overline{\text{ا ب}}$ اور $\overline{\text{ا ج}}$ بالترتیب 5.1 سم اور 7.3 سم ہوں اس مثلث کے رقبے کے برابر ایک مربع بناؤ اور اس کے ایک ضلع کی پیمائش کرو ۔



84 خط $\overline{\text{د لا}}$ پر $\overline{\text{دا}}$ = ا اور $\overline{\text{دل}}$ = ب کاٹو۔ $\overline{\text{دا}}$ پر ایک نصف دائرہ بناؤ اور $\overline{\text{ل ج}}$ ⊥ $\overline{\text{دا}}$ کھینچو۔ جو نصف دائرے کو ج پر کاٹے ۔ د ج کو ملاؤ۔ ثابت کرو کہ $\overline{\text{د ج}}$، ا اور ب کا وسطی متناسب ہوگا ۔

85 ایک مستطیل کا جو ایک دیے ہوئے مربعے کے برابر ہے ایک ضلع معلوم ہے۔ دوسرا ضلع معلوم کرو ۔

86 ایک معین بناؤ جو رقبے میں ایک مساوی الاضلاع مثلث (جس کا ہر ضلع 2 ہو) کے برابر ہو اور اس کا ایک زاویہ مثلث کے زاویے کے برابر ہو ۔

87 ایک دیے ہوئے خط کو خارجی وسطی نسبت میں تقسیم کرو ۔

88 سوال نمبر 4 صفحہ 380 کی شکل میں ثابت کرو کہ $\overline{\text{ب ف}}$ نقطہ ج پر وسطی تناسب میں تقسیم ہوتا ہے ۔

89 $\overline{\text{ف ا}}$ میں سے $\overline{\text{ف ق}}$ = $\overline{\text{ف ب}}$ کاٹو اور ثابت کرو کہ $\overline{\text{ا ف}}$ نقطہ ق پر وسطی تناسب میں تقسیم ہوتا ہے ۔

90 جب کسی خط کو وسطی تناسب میں تقسیم کیا جائے تو ثابت کرو کہ پورے خط اور اس کے ایک حصے پر کے مربعوں کا فرق مساوی ہے۔ اس خط اور اس حصے کے

مستطیل کے ؛

91 سوال نمبر 4 صفحہ 380 کی شکل میں ثابت کرو کہ دف ⊥ ب س اور
ل ف ∥ ا س ؛

92 ایک خط ا ب کو داخلی طور پر ف میں اور خارجی طور پر نقطہ ق میں اس طرح تقسیم کرو کہ اف² : ب ف² = اق² : ب ق² = 3 : 7 ؛

93 ایک نقطے کا طریق النقاط جس کے دو دیے ہوئے نقاط سے فاصلوں کی نسبت ہمیشہ مستقل ہو ایک دائرہ ہوگا ؛

94 مثلث ا ب ج میں نقطہ د اس کے عمودوں کا نقطۂ تقاطع ہے۔ اہ نقطہ ا سے ب ج پر عمود ہے ف ، د ا کا نقطۂ تنصیف ہے۔ ثابت کرو کہ
اج × ب د + اب × ج د = ب ج × ف ہ 2 ؛

95 دو △ⁿ کا ایک ایک زاویہ برابر ہے۔ ثابت کرو کہ ان کے رقبوں کی نسبت ان اضلاع کے مستطیلوں کے برابر ہوگی۔ جن کے درمیان دو زاویے واقع ہیں ؛

96 ا ب ج ایک △ ہے اہ ⊥ ب ج پر ا ب ، ب ہ ، ا ج اور ج ہ پر متشابہ شکلیں بنائی گئی ہیں۔ ثابت کرو کہ ا ب اور ا ج پر کی شکلوں کا فرق برابر ہے ب ہ اور ج ہ پر کی شکلوں کے فرق کے ؛

97 ایک دائرے پر واقع کسی نقطہ د سے دو خطوط مماس ا ج اور ب ج پر عمودوں کا مستطیل برابر ہوگا د سے وتر ا ب پر عمود کے مربع کے ؛

98 ا ب ج ایک متساوی الساقین مثلث ہے۔ ثابت کرو کہ کسی نقطہ ف کا طریق النقاط جو اس طرح گردش کرے کہ اس سے مساوی اضلاع ا ب اور ا ج پر عمودوں کا مستطیل قاعدہ ب ج پر عمود کے مربعے کے برابر ہو۔ ایک دائرہ ہوگا جو ا ب اور ا ج کو علی الترتیب ب اور ج پر مس کرے گا ؛

99 دو مساوی الاضلاع مثلث بناؤ۔ جو آپس میں ایک دی ہوئی نسبت رکھتے ہوں اور جن کے رقبوں کا مجموعہ ایک دیے ہوئے مساوی الاضلاع مثلث کے رقبے کے برابر ہو ؛

100 ا ب ج ایک مثلث ہے جس کا ∠ا قائمہ ہے۔ ا ب پر واقع کسی نقطہ ف سے ف ن ، ب ج پر عمود کھینچا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ
ف ن × ب ج = ف ب × ا ج ؛

101 ۱۱ع اب ج د کے ضلع ا د کے نقطۂ تنصیف م سے ایک خط ب م کھینچا گیا ہے۔ جو اج کو س پر اور ج د (بڑھے ہوئے) کو ق پر کاٹتا ہے ثابت کرو کہ
ق س = 2 س ب ٭

102 اگر ج کسی دائرے کا مرکز اور د ف ج ق کوئی خط ہو جو دائرے کو ف اور ق پر قطع کرے۔ و ط دائرے کا خطِ مماس ہو۔ جسے دوسرا خطِ مماس ف ن نقطہ ن پر کاٹتا ہو تو ثابت کرو کہ △ و ف ن : △ و ط ج = و ف : و ق

103 متشابہ اور ایک ہی طرح واقع شکلیں ایک قائمۃ الزاویہ مثلث کے اضلاع پر کھینچی گئی ہیں۔ ثابت کرو کہ وتر پر واقع شکل کا رقبہ باقی دونوں اضلاع پر واقع شکلوں کے مجموعے کے برابر ہوگا ٭

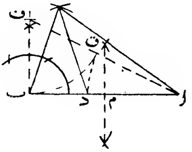
104 اب ج اور ج د ی دو مساوی △ ہیں۔ جن کے ج پر واقع زاویے برابر ہیں اور خط ب ج ی کی مخالف سمتوں میں واقع ہیں۔ ثابت کرو کہ اگر نقطہ ج میں سے ب د کے متوازی خط جس کے سرے اب اور د ی پر واقع ہوں کھینچا جائے تو ج اس کا نقطۂ تنصیف ہوگا ٭

105 ب ج کسی دائرے کا قطر اور ا اس کے محیط پر کوئی نقطہ ہے۔ ب ج پر کوئی نقطہ د لے کر د ی ⊥ ب ج پر کھینچا گیا ہے جو ب ا دائرہ اور ج ا کو بالترتیب ی، ف اور ک پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ :-
د ف² = د ی × د ک

ضمیمہ

متفرق مسائل

۱ ایک متساوی الساقین مثلث بنانا۔ جس کے قاعدے پر کا ہر زاویہ راسی زاویے سے دگنا ہو۔ یعنی مثلث کے زاویے 72°، 72° اور 36° ہوں ؂



(۱) ایک خط $\overline{\text{اب}}$ لو اور اسے نقطہ د پر اس طرح تقسیم کرو کہ $\overline{\text{اب}} \times \overline{\text{دب}} = \overline{\text{اد}}^2$ (مسئلہ 99)

(۲) د اور ب کو مرکز اور $\overline{\text{دا}}$ کو نصف قطر لے کر قوسیں لگاؤ جو ایک دوسری کو ی پر قطع کریں ؂

(۳) $\overline{\text{ای}}$ اور $\overline{\text{بی}}$ کو ملاؤ۔ ا ب ی مطلوبہ مثلث ہے ؂

ثبوت: $\overline{\text{دی}}$ کو ملاؤ۔

$\overline{\text{بی}}^2 = \overline{\text{اد}}^2 = \overline{\text{اب}} \times \overline{\text{بد}}$ (بروئے عمل)

$\therefore$ $\overline{\text{بی}}$ △ ادی کے دائرۂ محیط کو مس کرتا ہے۔

$\therefore$ ب$\hat{\text{ی}}$د $=$ د$\hat{\text{ا}}$ی (متبادلہ قطاع میں)

$=$ د$\hat{\text{ی}}$ا (کیونکہ $\overline{\text{دی}} = \overline{\text{دا}}$)

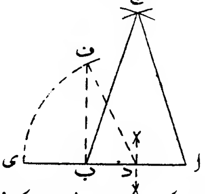
$\therefore$ ب$\hat{\text{ی}}$ا $= 2$ د$\hat{\text{ا}}$ی

لیکن ب دٰی = دٰای + دیٰا = 2 دٰای

نیز ب دٰی = ی بٰد ∴ ب یٰا = 2 اٰ اور ا بٰی = 2 اٰ

∴ ا ب ی مطلوبہ مثلّث متساوی السّاقین ہے ؎

۶ ایک دیے ہوئے خط ا ب پر ایک متساوی السّاقین مثلّث بنانا۔ جس کا قاعدے پر واقع ہر زاویہ راسی زاویے سے دگنا ہو۔ یعنی مثلّث کے زاویے 72°، 72° اور 36° ہوں ؎



عمل: ا ب کی د پر تنصیف کرو۔ ب ف ⊥ ا ب کے مساوی اور ⊥ ا ب کھینچو د کو مرکز اور د ف نصف قطر لے کر ایک قوس لگاؤ۔ جو بڑھے ہوئے ا ب کو ی پر قطع کرے گا اور ب کو مرکز مان کر اور ا ی نصف قطر لے کر قوسیں لگاؤ۔ جو ایک دوسری کو ج پر قطع کریں ا ب ج مطلوبہ متساوی السّاقین مثلّث ہوگا ؎

ثبوت: △ ا ب ج بر روئے عمل متساوی السّاقین ہے۔

اب ہمیں یہ ثابت کرنا ہے کہ اس قاعدے پر کا ہر زاویہ راسی زاویے سے دگنا ہے

ا ی × ی ب = (د ی + ا د) (د ی − د ب)

= (د ی + د ب) (د ی − د ب)

= د ی² − د ب² = د ف² − د ب²

= ب ف² = ا ب²

پس ا ی نقطہ ب پر وسطی اور طرفی تناسب میں تقسیم ہوتا ہے۔ اور ا ب بڑا حصّہ ہے نیز ا ی = ا ج اس کا مطلب یہ ہے کہ اگر ا ج کی تقسیم وسطی اور طرفی تناسب میں کی جائے۔ تو اس کا بڑا حصّہ قاعدہ ا ب کے برابر ہوگا۔

پس بروئے عمل (مسئلہ اوّل متفرق) △ اب ج میں قاعدے پر کا ہر ایک زاویہ راسی زاویے سے دُگنا ہے۔

مندرجہ ذیل عمل کی تصدیق کرو۔ جس میں ایک ایسا متساوی الساقین مثلث بنایا گیا ہے۔ جس کے قاعدے پر کا ہر زاویہ راسی زاویے سے دُگنا ہے۔

ایک خط $\overline{دل}$ لو اور اسے ج پر وسطی اور طرفی تناسب میں تقسیم کرو تاکہ $\overline{دل} \times \overline{لج} = \overline{دج}^2$ ، د کو مرکز اور $\overline{دل}$ نصف قطر لے کر دائرہ ل ب و بناؤ۔ دائرے میں وتر $\overline{لب} = \overline{دج}$ کھینچو۔ $\overline{دب}$ کو ملاؤ۔

پس د ل ب مطلوبہ مثلث متساوی الساقین ہوگا۔

نتیجہ صریح (1) ثابت کرو زاویہ ل د ب $= 36^\circ$

(2) $\overline{لب}$ ایک معشر منتظم کا ضلع ہے جو دائرہ ل ب و میں کھینچا جائے۔

(3) اس منتظم معشر کو مکمل کرو۔ اس کی متبادلہ راسوں کو ملانے سے ایک مخمس بن جائے گا۔ جو اس دائرے میں واقع ہوگا۔

مشق

1 ایک دائرے میں ایک منتظم معشر بناؤ۔

2 ایک دائرے میں ایک منتظم مخمس بناؤ۔

3 ایک دائرے کے گرد ایک 〃 〃 〃

4 ایک دائرہ 5 سم نصف قطر کا بناؤ اور اس کے گرداگرد ایک منتظم مخمس بناؤ۔

5 ایک دائرہ 1.5" نصف قطر کا بناؤ اور اس میں ایک منتظم معشر کھینچو۔

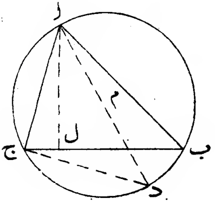
6 ایک دائرہ 4 سم نصف قطر کا بناؤ اور اس کے گرداگرد ایک منتظم مخمس بناؤ۔

7 ایک زاویہ قائمہ کو پانچ برابر حصوں میں تقسیم کرو۔

8 ایک دیے ہوئے قاعدے پر ایک مثلث بناؤ۔ جس کے زاویے 36°، 72° اور 72° ہوں۔

9 ایک دیے ہوئے قاعدے پر ایک منتظم مخمس بناؤ۔

ع کسی مثلث ا ب ج کے دائرۂ محیط کا نصف قطر معلوم کرنا ۔



معلوم : △ ا ب ج جس کے اضلاع طا ، طب ، طج ہیں اور اس کے دائرۂ محیط کا مرکز م ہے ۔

مطلوب : دائرۂ محیط کا نصف قطر ر معلوم کرنا ۔

عمل : وتر ا م د کھینچو ۔
ج د کو ملاؤ اور ا ل ⊥ ب ج کھینچو ۔

ثبوت : △ن ا ج د ، ا ل ب میں

$$\left.\begin{array}{l} \widehat{\text{اجد}} = \widehat{\text{الب}} \\ \widehat{\text{د}} = \widehat{\text{ب}} \end{array}\right\}$$ (قائمے) (ہم قطعہ زاویے)

∴ مثلث متشابہ ہیں ۔

$$\therefore \frac{\text{اد}}{\text{اج}} = \frac{\text{اب}}{\text{ال}} \quad \text{یا} \quad \frac{2\text{ر}}{\text{طب}} = \frac{\text{طج}}{\text{ال}}$$

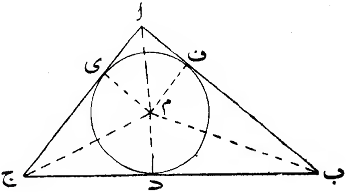
$$\therefore 2\text{ر} = \frac{\text{طب}\times\text{طج}}{\text{ال}} = \frac{\text{طا}\times\text{طب}\times\text{طج}}{\text{طا}\times\text{ال}}$$

$$= \frac{\text{طا}\times\text{طب}\times\text{طج}}{2\triangle}$$

(جب △ سے مراد △ ا ب ج کا رقبہ ہے)

$$\text{پس ر} = \frac{\text{طا}\times\text{طب}\times\text{طج}}{4\triangle}$$

4 مثلث اب ج کے اندرونی دائرے کا نصف قطر معلوم کرنا ؛



معلوم: △ اب ج جس کے اضلاع طا، طب، طج ہیں اور اس کے اندرونی دائرے کا مرکز م ہے۔

مطلوب: اندرونی دائرے کا نصف قطر سر معلوم کرنا۔

عمل: نصف قطر $\overline{\text{مد}}$ ، $\overline{\text{می}}$ اور $\overline{\text{مف}}$ کھینچو۔ جو $\overline{\text{بج}}$ ، $\overline{\text{جا}}$ اور $\overline{\text{اب}}$ پر عمود ہیں۔
$\overline{\text{ما}}$ ، $\overline{\text{مب}}$ اور $\overline{\text{مج}}$ کو ملاؤ۔

ثبوت:

$$\triangle\text{مبج} + \triangle\text{مجا} + \triangle\text{ماب} = \triangle\text{ابج}$$

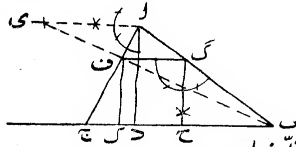
$$\therefore \tfrac{1}{2}\text{سر}\times\text{طا} + \tfrac{1}{2}\text{سر}\times\text{طب} + \tfrac{1}{2}\text{سر}\times\text{طج} = \triangle$$

$$\text{یعنی سر}\left(\frac{\text{طا}+\text{طب}+\text{طج}}{2}\right) = \triangle \quad \text{پس سر}\times\text{نم} = \triangle$$

$$\text{پس سر} = \frac{\triangle}{\text{نم}} \text{ ، جبکہ نم} = \frac{\text{طا}+\text{طب}+\text{طج}}{2}$$

$$(\text{نم} = \text{نصف محیط})$$

5 ایک دِیے ہُوئے مثلّث میں ایک مُربّع بنانا ؛



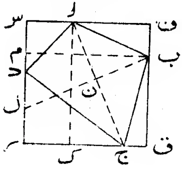
معلوم: ایک مثلّث ا ب ج ۔
مطلوب: اُس کے اندر ایک مُربّع بنانا ۔
عمل: اد ⊥ ب ج کھینچو اور ای || ب ج کھینچو تاکہ ای = اد
ی ب کو مِلاؤ جو اج کو ف پر قطع کرے ۔ ف ک ⊥ ب ج اور
ف گ || ب ج اور گ ح ⊥ ب ج کھینچو۔ تب ف گ ح ک مطلوبہ
مُربّع ہے ۔

[ثبوت کے لیے اشارات: گ ح / ا د = ب گ / ب ا اور گ ف / ا ی = ب گ / ب ا

∴ گ ح : اد = گ ف : ای لیکن اد = ای (بروئے عمل)

∴ گ ح = گ ف وغیرہ]

6 ایک دِیے ہُوئے چوکور کے گرداگرد ایک مُربّع بنانا ؛

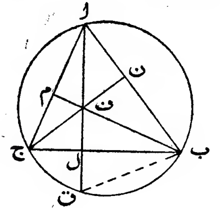


معلوم: چوکور ا ب ج د
مطلوب: اُس کے گرداگرد ایک
مُربّع بنانا ۔
عمل: اج کو مِلاؤ۔ ب ن ⊥ اج
کھینچو۔ اور اُسے ل تک بڑھاؤ
اور ب ل = اج کاٹو۔ د ل کو مِلاؤ
ا اور ج میں سے د ل پر ⊥ کھینچو۔
اور ب میں سے ف ق ب ق || د ل کھینچو تاکہ شکل ف ق م س بن جائے ۔

یہی مطلوبہ مربع ہوگا۔

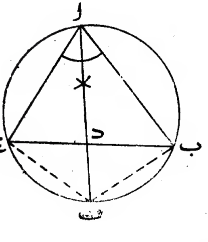
[ثبوت کے لیے اشارات: اک اور بم عمود کھینچو۔ اب △ن
اجک اور بلم ہر لحاظ سے برابر ہیں۔
پس اک = بم، فاق = قب وغیرہ]

7 ف کسی مثلث اب ج کے عمودوں کا نقطۂ تقاطع ہے۔ عمود
اف ل کو بڑھایا گیا ہے جو دائرۂ محیط کو ق پر ملتا ہے تو ثابت کرو کہ
فل = قل



ثبوت: △ن ج ال، ج ب م
متشابہ ہیں۔
∴ ج ا̂ل = ج ب̂م
لیکن ج ا̂ل = ق ب̂ل
∴ ف ب̂ل = ق ب̂ل
لہٰذا قائمۃ الزاویہ △ن ہر لحاظ
سے برابر ہیں اور فل = قل

8 اگر اد مثلث اب ج کے زاویہ ا کا ناصف ہو تو ثابت کرو کہ
اب × اج = ب د × ج د + اد²



عمل: △ کا دائرۂ محیط کھینچو۔ اور
اد کو اتنا بڑھاؤ کہ اس دائرے
کو ف پر ملے۔ ب ف اور ف ج
کو ملاؤ۔

ثبوت: △ن اب د اور اف ج
متشابہ ہیں۔

$$\therefore \frac{\text{اف}}{\text{اج}} = \frac{\text{اب}}{\text{اد}}$$

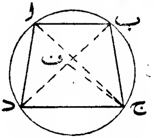
∴ اب × اج = اد × اف

= اد^2 + اد × دف

= اد^2 + دب × دج

9 طالمی صاحب کا مسئلہ

اگر اب ج د ایک متدائر چوکور ہو تو ثابت کرو کہ اج × ب د = اب × ج د + ج ب × د ا ۔



عمل: خط ج ف اس طرح کھینچو کہ د ج ف = ا ج ب ۔ تب د ج ا = ف ج ب

ثبوت: △ن د ج ا اور ف ج ب متشابہ ہیں ۔

∴ اد / اج = ب ف / ب ج

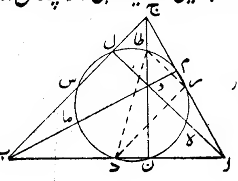
∴ اد × ب ج = اج × ب ف

نیز اسی طرح اب × ج د = اج × ف د ·

∴ جمع کرنے سے اد × ب ج + اب × ج د = اج × ب د

10 نو نقطی دائرہ

مثلث اب ج میں ثابت کرو کہ مندرجہ ذیل نقطے ایک ہی دائرہ پر واقع ہوں گے:



1. د، س، ص تینوں اضلاع کے نقاطِ تنصیف ۔

(2) ل ، م ، ن عمودوں کے پائے اور

(3) ٧ ، ما ، طا جو دا ، دب ، دج کے نقاطِ تنصیف ہیں ۔ جب د تینوں عمودوں کا نقطہ

تقاطع ہے۔

ثبوت: دس ∥ بج اور سط ∥ ال

لیکن بج ⊥ ال پر ∴ دس ⊥ سطا پر ∴ دس طا = ۹۰°

پس ایک دائرہ جو طاد وتر پر کھینچا جائے س میں سے بھی گزرے گا۔

اسی طرح یہ دائرہ س میں سے بھی گزرے گا۔

∴ وہ دائرہ جو د، س، س میں سے گزرتا ہے طا میں سے بھی گزرتا ہے۔

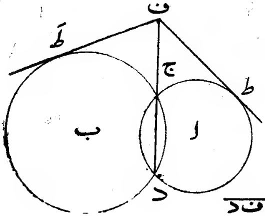
اسی طرح وہ ما اور کا میں سے بھی گزرے گا۔

اب ن̂ = ۹۰° ∴ جو دائرہ طاد وتر پر کھینچا جائے گا وہ ن میں سے بھی گزرے گا۔ اسی طرح وہ ل اور م میں سے بھی گزرے گا۔

پس یہ دائرہ د، س، س، کا، ما، طا، ل، م، ن میں سے گزرے گا ۔

محورِ اساسی

۱۱ اگر کوئی نقطہ دو دائروں کے مشترک وتر پر واقع ہو اور اس سے دونوں دائروں پر مماس کھینچے جائیں تو وہ دونوں باہم برابر ہوں گے



معلوم: ف، دج پر کوئی نقطہ ہے

جب دج دو متقاطع دائروں کا مشترک وتر ہے۔

فط اور فطَ دو خطِ مماس دونوں دائروں پر کھینچے گئے ہیں۔

مطلوب: فط = فطَ

ثبوت: فط² = فج × فد

نیز فطَ² = فج × فد

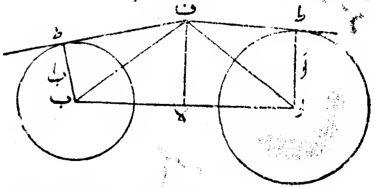
∴ فط² = فطَ² یا فط = فطَ

(فہو المطلوب)

تعریف: ایسے نقطے کا خطِ "التقاط" جس سے دو دائروں پر کھینچے ہوئے

خطوطِ مماس باہم برابر ہوں۔ اُن کا محورِ اساسی کہلاتا ہے۔

12 دو غیر مُتقاطع دائروں کا محورِ اساسی معلوم کرنا ٭



معلوم: دو دائرے جن کے مرکز ا اور ب ہیں اور $\overline{\text{ف ط}}$ اور $\overline{\text{ف طَ}}$ خطوطِ مماس ہیں
جب $\overline{\text{ف ط}} = \overline{\text{ف طَ}}$

مطلوب: ف کا طریقِ التقاط معلوم کرنا۔

عمل: $\overline{\text{اب}}$ کو مِلاؤ اور $\overline{\text{ف لا}} \perp \overline{\text{اب}}$ کھینچو۔
$\overline{\text{ف ا}}$، $\overline{\text{ف ب}}$، $\overline{\text{ا ط}}$، $\overline{\text{ب طَ}}$ کو مِلاؤ۔

ثبوت: $\overline{\text{ف ط}} = \overline{\text{ف طَ}}$

$\therefore \overline{\text{ف ط}}^2 = \overline{\text{ف طَ}}^2$

$\therefore \overline{\text{ف ا}}^2 - \text{اَ}^2 = \overline{\text{ف ب}}^2 - \text{بَ}^2$

$\therefore \overline{\text{ف لا}}^2 + \overline{\text{لا ا}}^2 - \text{اَ}^2 = \overline{\text{ف لا}}^2 + \overline{\text{لا ب}}^2 - \text{بَ}^2$

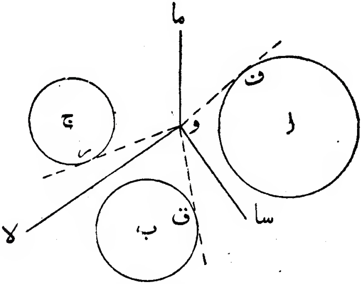
یعنی $\overline{\text{ا لا}}^2 - \overline{\text{ب لا}}^2 = \text{اَ}^2 - \text{بَ}^2$

$\therefore$ لا ایک قائم نقطہ ہے۔

پس ف اُس خط پر واقع ہے جو قائم نقطہ لا میں سے قائم خط $\overline{\text{اب}}$ پر عموداً کھینچا گیا ہے۔

یہی خط ان دو دائروں کا محورِ اساسی ہے۔

۱۵ | تین دِیے ہُوئے دائِروں میں سے ہر دو کے محورِ اساسی ہم نقطہ ہوں گے ٭



مفرُوض : وما اُن دائِروں کا محورِ اساسی ہے ۔جن کے مرکز ا اور ج ہیں اور وسا اُن دائِروں کا محورِ اساسی ہے ۔جن کے مرکز ا اور ب ہیں۔

مطلُوب : ب اور ج مرکز کے دائِروں کا محورِ اساسی بھی نُقطہ و میں سے گزرے گا ۔

ثبُوت : و سے وف ، وق ، ور تینوں دائِروں پر خطُوطِ مماس کھینچو۔

∵ و ، ا اور ب مرکز والے دائِروں کے محورِ اساسی پر واقع ہے۔

∵ وف = وق ، اِسی طرح

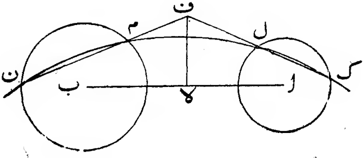
∵ و ، ا اور ج مرکز والے دائِروں کے محورِ اساسی پر بھی واقع ہے۔

∴ وف = ور

∴ وق = ور

پس و ، ب اور ج مرکز والے دائِروں کے محورِ اساسی پر بھی واقع ہے ۔

۱۷ دو دیے ہوئے دائروں کا محورِ اساسی کھینچنا ؛



معلوم : دو دائرے جن کے مرکز ا اور ب ہیں ۔

مطلوب : اُن کا محورِ اساسی کھینچنا ۔

عمل : کوئی اور دائرہ ک ل م ن کھینچو۔ جو دیے ہوئے دائروں کو ک، ل اور م، ن پر ملے ۔

فرض کرو ک ل اور م ن نقطہ ف پر ملتے ہیں ۔

ا ب کو مِلاؤ اور ف لا ⊥ ا ب کھینچو ۔

پس ف لا مطلوبہ محورِ اساسی ہوگا ۔

ثبوت : مسئلہ نمبر ۱۱ اور مسئلہ نمبر 12 سے بآسانی اخذ کیا جا سکتا ہے ۔

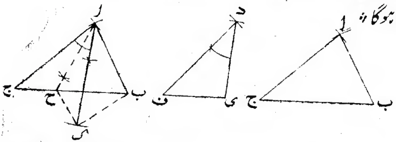
(فہو المطلوب)

عدم مُساوات

دو اَور مسائل جن کا تعلُّق عدم مُساوات سے ہے یہاں درج کیے جاتے ہیں۔

نمبر ۱

اگر دو △ں کے دو دو اضلاع بالتّرتیب برابر ہوں لیکن اُن کے درمیانی زاویے غیر مُساوی ہوں تو بڑا زاویہ رکھنے والے مثلّث کا قاعدہ دُوسرے کے قاعدے سے بڑا ہوگا۔



مفرُوض: دو △ں اب ج اور د ی ف جن میں اب = د ی، اج = د ف
اور ا > د

مطلُوب: ب ج > ی ف

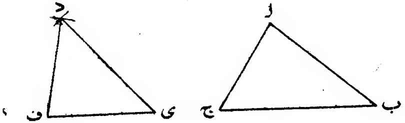
عمل: اب کے نقطہ ا پر زاویہ ب اک = د بناؤ۔
اک = د ف = اج کاٹو، ب ک کو ملاؤ۔
اح، زاویہ ک ا ج کا ناصف کھینچو، ک ح کو ملاؤ۔

ثبُوت: △ں اب ک اور د ی ف منطبق ہیں ∴ ب ک = ی ف
اب چونکہ اج = اک، اح = اح اور ح ا ج = ک ا ح
(بروئے عمل)

∴ △ اح ج = △ اح ک
∴ ح ک = ح ج
اب △ ب ح ک میں ب ح + ح ک > ب ک
∴ ب ح + ح ج > ب ک (کیونکہ ح ک = ح ج)
∴ ب ج > ب ک لیکن ب ک = ی ف (بروئے ثبُوت)
پس ب ج > ی ف
(وھُوَ المطلُوب)

[illegible]

اگر دو مثلثوں کے دو دو اضلاع بالترتیب برابر ہوں اور اُن کے قاعدے غیر مُساوی تو بڑے قاعدے والے مثلث کے ان دو اضلاع کے درمیان کا زاویہ دُوسرے مثلث کے متناظرہ زاویے سے بڑا ہوگا ۔



مفرُوض: △ن اب ج، دی ف جن میں $\overline{\text{اب}} = \overline{\text{دی}}$، $\overline{\text{اج}} = \overline{\text{دف}}$
اور $\overline{\text{بج}} > \overline{\text{یف}}$

مطلُوب: $\hat{\text{ا}} > \hat{\text{د}}$

ثبُوت: اگر $\hat{\text{ا}}$ > نہیں ہے $\hat{\text{د}}$ سے تو یا (۱) $\hat{\text{ا}} = \hat{\text{د}}$ یا (2) $\hat{\text{ا}} < \hat{\text{د}}$

(۱) اگر $\hat{\text{ا}} = \hat{\text{د}}$ تو $\overline{\text{بج}} = \overline{\text{یف}}$ (جو مفرُوض کے خلاف ہے)

(2) اگر $\hat{\text{ا}} < \hat{\text{د}}$ تو $\overline{\text{بج}} \quad \overline{\text{یف}}$ (برُوئے مسئلہ نمبرا)
جو ناممکن ہے
پس $\hat{\text{ا}} > \hat{\text{د}}$

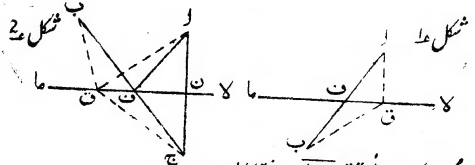
(فہوَ المطلُوب)

تعریف نمبر ا: جب کوئی بدلتی ہُوئی مقدار کسی ایسی قیمت میں سے گزُرے جو اس سے متصلہ قبل اور بعد کی قیمتوں سے بڑی ہو۔ تو اس قیمت کو اس مقدار کی قیمتِ اعظم کہا جاتا ہے ۔

تعریف نمبر 2: جب کوئی بدلتی ہُوئی مقدار کسی ایسی قیمت میں سے گزُرے جو اُسی سے متصلہ قبل اور بعد کی قیمتوں سے چھوٹی ہو۔ تو اس قیمت کو اس مقدار کی قیمت اقل کہتے ہیں ۔

مسئلہ عملی نمبر ۱

کسی دیے ہوئے خطِ مستقیم میں ایک ایسا نقطہ دریافت کرنا جس سے دو دیے ہوئے نقطوں سے فاصلوں کا مجموعہ اقل ہو۔



معلوم: ایک خطِ مستقیم لاما اور دو نقاط ا اور ب

مطلوب: لاما میں ایک نقطہ ف معلوم کرنا تاکہ اف + ف ب قلیل ترین ہو۔

عمل: (۱) اگر نقاط ا، ب خط لاما کی مخالف سمتوں میں واقع ہوں تو اب کو ملاؤ جو لاما کو ف پر کاٹے۔ یہی نقطہ ف مطلوبہ نقطہ ہے۔

(۲) اگر نقاط ا، ب خط لاما کے ایک ہی طرف واقع ہوں تو ان ⊥ لاما کھینچو ان کو ج تک بڑھاؤ۔ تاآنکہ ن ج = ن ا، ب ج کو ملاؤ جو لاما کو ف پر کاٹے۔ اف کو ملاؤ۔ تب اف + ف ب قلیل ترین ہوگا۔ اور ف مطلوبہ نقطہ ہوگا۔

ثبوت: اگر ف مطلوبہ نقطہ نہیں ہے تو ق کوئی اور نقطہ لاما میں لو۔ اق اور ب ق کو ملاؤ۔

(۱) پہلی شکل میں △ ا ب ق میں اق + ق ب > اب سے
پس اف + ف ب چھوٹا ہے اق + ق ب سے خواہ نقطہ ق کہیں بھی ہو

(۲) دوسری شکل میں △ ان ف ≡ ف ن ج
∴ ف ا = ف ج
اب △ ب ق ج میں ب ق + ق ج > ب ج > ب ف + ف ج
> ب ف + ف ا

پس اف + ف ب اقل ہے [∵ ف ج = ف ا]

مشقیں

1 اب ایک نا معلوم طُول کا خط ہے۔ ل، م اس کی ایک ہی سمت میں واقع دو نقاط ہیں۔ جن سے خط پر عمُودی فاصلے ایک سم اور 4 سم ہیں۔ نیز ل م = 5 سم، اب میں کوئی ایسا نقطہ ف دریافت کرو تاکہ ف ل + ف م قلیل ترین ہو۔

الجبرے کے طریقے سے

2 دو خطوں کے طُول کا مجمُوعہ دیا ہُوا ہے۔ اُن کا مُستطیل سب سے بڑا ہو گا۔ جب وُہ دونوں خط برابر ہوں۔
فرض کرو خطُوط کی لمبائیاں لا اور ما ہیں۔ مُندرجۂ ذیل کُلیّہ پر غور کرو:-

$$4\,\text{لا}\,\text{ما} = (\text{لا} + \text{ما})^2 - (\text{لا} - \text{ما})^2$$

بائیں طرف کی پہلی رقم مُستقل قیمت کی ہے۔ لہٰذا 4 لا ما کی قیمت سب سے زیادہ اُس وقت ہوگی جب $(\text{لا} - \text{ما})^2$ صفر ہو جائے یا لا = ما
∴ لا ما کی قیمت اس وقت سب سے بڑی ہو گی جب لا = ما ہو۔

3 اگر ایک خط کے دو حصّے کر دیے جائیں تو ان حصّوں پر مُربّعوں کا مجمُوعہ اقل ہوگا۔ جب وُہ دونوں برابر ہوں۔ کُلیّۂ ذیل پر غور کرو:-

$$2(\text{لا}^2 + \text{ما}^2) = (\text{لا} + \text{ما})^2 + (\text{لا} - \text{ما})^2$$

4 کسی مُستطیل کا رقبہ دیا ہُوا ہے۔ اس کا احاطہ قلیل ترین ہو گا۔ جب وہ مُربّع ہو گا۔ کُلیّۂ ذیل پر غور کرو:-

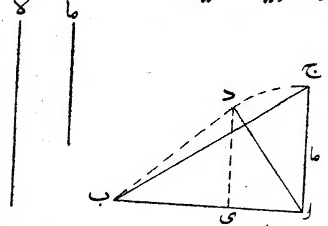
$$(\text{لا} + \text{ما})^2 = (\text{لا} - \text{ما})^2 + 4\,\text{لا}\,\text{ما}$$

5 اگر دو خطُوط پر کا مُستطیل دیا ہُوا ہو۔ تو اُن پر مُربّعوں کا مجمُوعہ قلیل ترین ہوگا جب وُہ دونوں برابر ہوں۔
کلیۂ ذیل پر غور کرو:-

$$\text{لا}^2 + \text{ما}^2 = 2\,\text{لا}\,\text{ما} + (\text{لا} - \text{ما})^2$$

مسئلہ عملی نمبر ۲

ایک مثلّث کے دو ضلعے دیے ہوئے ہیں۔ بڑے سے بڑے رقبے کا مثلّث بنانا۔



معلوم: دو طول ل اور ما

مطلوب: زیادہ سے زیادہ رقبے کا مثلّث بنانا۔ جس کے اضلاع کا طول علی الترتیب ل اور ما ہو۔

عمل: اب = ل لو
اج ⊥ اب کھینچو تاکہ اج = ما ہو
ج ب کو ملاؤ۔ اب ج مطلوبہ △ ہے۔

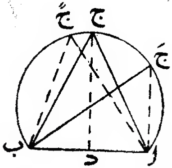
ثبوت: اگر ایسا نہیں ہے۔ تو △ ا د ب کو جس کا ضلع ا د = ما ہے۔
سب سے بڑا △ فرض کرو۔
د ی ⊥ اب کھینچو۔
اب قائم الزاویہ △ ا ی د میں ا د > د ی
لیکن ا د = ما = ج ا
∴ د ی < ج ا
∴ ½ اب × د ی < ½ اب × ج ا
∴ رقبہ △ اب د < رقبہ △ اب ج
پس △ اب ج سب سے بڑا ہے رقبے میں
(فهو المطلوب)

اعظم اور اقل قیمتوں کے متعلق مشقیں

1 ایک دائرہ (مرکز ج اور نصف قطر 2 سم) اور ایک خط (طول 3 سم) اس طرح دیے ہوئے ہیں کہ ج آ اور ج ب بالترتیب 3.5 سم اور 5 سم ہیں رقبہ اعظم اور رقبہ اقل والے مثلث قاعدہ آب پر اس طرح بناؤ کہ ان کے راس دیے ہوئے دائرے کے محیط پر واقع ہوں۔ ان کے عمود ناپو اور رقبہ دریافت کرو۔

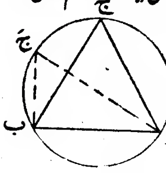
2 کسی مثلث کا راسی زاویہ اور قاعدہ معلوم ہیں۔ ثابت کرو کہ اس کے اضلاع پر مربعوں کے مجموعے کی قیمت عظیم ترین اس وقت ہوگی۔ جب وہ مساوی الساقین ہو۔

3 جو مثلث ایک ہی قاعدے پر اور ایک ہی متوازی خطوط کے درمیان بنائے جائیں ان میں سے صرف مساوی الساقین مثلث ہی میں احاطے کی قیمت اقل ہوگی۔



4 ان تمام مثلثوں میں سے جو ایک ہی قاعدے پر ہوں۔ اور ایک ہی راسی زاویہ رکھتے ہوں۔ صرف متساوی الساقین مثلث ہی میں رقبے اور احاطے کی قیمت اعظم ہوگی۔

5 ان تمام مثلثوں میں سے جو مندائر ہوں صرف △ متساوی الاضلاع کے رقبے کی قیمت اعظم ہوگی۔



6 ان تمام مثلثوں میں سے جو مندائر ہوں صرف △ متساوی الاضلاع کے احاطے کی قیمت اعظم ہوگی۔

7 ثابت کرو کہ سب سے بڑا چوکور جو مندائر

1952

(ا) ایک متوازی الاضلاع ابجد کھینچو جس کے وتر اج ، بد بالترتیب 7 سم اور 9 سم اور ضلع اب 6 سم ہو متوازی الاضلاع کا ارتفاع ناپو۔ (سوال 38 صفحہ 134)

(ب) ایک مثلث ابج کھینچو جس کا ارتفاع ال $=3''$ اور قاعدے کے زاویے ب اور ج بالترتیب $45°$ اور $60°$ ہوں۔ مثلث کے دونوں دوسرے ارتفاع بم ، جن کھینچو زاویہ لمن ناپو۔
(ہندسی تحلیل سوال نمبر 14 صفحہ 132)

یا

ایک مثلث ابج کھینچو جس کے اضلاع بج $=4$ سم ، جا $=2$ سم اب $=9$ سم ہوں۔ زاویے ب اور ج کے بیرونی ناصف نقطہ د پر ملتے ہوئے کھینچو۔ زاویہ باد اور جاد ناپو ، نقطہ د کے اب اور اج سے عمودی فاصلہ ناپو۔ (سوال نمبر 21 صفحہ 166)

مندرجہ ذیل تین اجزا میں سے کوئی سے دو حصے حل کرو :—

(ا) دو دائرے کھینچو جن کے نصف قطر $1{\cdot}3''$ اور $1{\cdot}7''$ اور جن کے مراکز کا درمیانی فاصلہ $2{\cdot}5''$ ہو دائروں کے نقاط انقطاع کو ا اور ب سے ظاہر کرو۔ اور نقطہ و بڑھے ہوئے خط با پر ایسا لو کہ او $=1''$ ہو نقطہ و سے بڑے دائرے کا ایک خط مماس کھینچو۔ ایک علیحدہ مربع کھینچو جس کا رقبہ مستطیل وا × وب کے برابر ہو۔ (مسئلہ 83 اور مسئلہ 58 لگاؤ)

(ب) ایک دائرے کے اندر اور گرد جس کا قطر $2{\cdot}8''$ ہو منتظم مسدس کھینچو۔ (مسئلہ 89 ، 90)

(ج) جیومیٹری کے طریقے سے $\frac{1}{3{\cdot}7}$ کی قیمت معلوم کرو۔ جب اکائی کی لمبائی ایک انچ ہو۔

اشارہ : $\frac{1}{3{\cdot}7}=\frac{10\times1}{37}$ پس 37 ، 1 ، 10 کا چوتھا متناسب معلوم کرو۔

3 (ا) اگر دو مثلثوں میں ایک کے زاویے اور ایک ضلع دوسرے مثلث میں اپنی نظیر کے دو زاویوں اور ایک ضلعے کے برابر ہوں تو ثابت کرو کہ دونوں مثلث منطبق ہوں گے۔ (مسئلہ 10)

(ب) دو مثلث ابج اور ابد ایک ہی قطعہ دائرہ (جس کا مرکز و ہے) کے اندر مشترک قاعدہ اب پر واقع ہیں۔ اگر زاویے باج اور ابد برابر ہوں اور اج ، بد کا م نقطہ انقطاع ہو تو ثابت کرو کہ مثلث ومج اور ومد منطبق ہوں گے۔ (سوال نمبر 89 صفحہ 314)

4 (ا) ثابت کرو کہ ایک مثلث کے وسطانیے ہم نقطہ ہوں گے -
(مسئلہ

(ب) مثلث ابج کے اضلاع بج ، جا اور اب کے نقاط تنصیف بالترتی
ل ا م ، ن ھیں ثابت کرو کہ
4(ال+بم +جن) < 3(بج+جا+اب)
(مسئلہ 39 سوال

5 (ا) ب، ج میں زاویہ ب قائمہ ہے ثابت کرو کہ
بج^2+اب^2=اج^2
(مسئلہ

(ب) مثلث ابج میں اب=1 ، بج=$\sqrt{3}$ اور جا=2 ثابت
کہ زاویہ ابج=90° اور زاویہ بجا=30°
(مسئلہ

6 (ا) ایک خط دو نقاط ا ، ب کو ملاتا ہوا اپنی ایک ہی سمت
دوسرے دو نقاط ج ، د پر اگر مساوی زاویے بناتا ہو تو ث
کرو کہ ابجد ایک متدائر چوکور ہے -
(مشق 70 سوال

(ب) ایک مثلث ابج کا عمودی مرکز و ہے اگر بڑھایا ہوا عمود
مثلث کے ضلعے بج کو ل پر اور اس کے دائرۂ محیط کو ک
کاٹے تو ثابت کرو کہ دل=ل ک
(مسئلہ 40 سوال

7 (ا) ثابت کرو کہ زاویہ جو نصف دائرہ میں واقع ہو زاویہ قائمہ ہ
زاویہ جو نصف دائرے سے بڑے قطعے میں واقع ہو - ق
سے کم ہوگا اور زاویہ جو نصف دائرے سے چھوٹے قطعے
واقع ہو قائمے سے بڑا ہوگا -
(مسئلہ

(ب) ایک مثلث ابج میں ال اور بم اس ہے دو عمود ہیں -
اب کا د نقطہ تنصیف ہو تو ثابت کرو کہ دل=دم
(مسئلہ 69 سوا

8 (ا) اگر دو مثلث متساوی الزوایا ہوں - تو ثابت کرو کہ ان
متناظرہ ضلعے متناسب ہوں گے -
(مسئلہ

(ب) ایک دائرے کے دو خطوط قاطع و اب ، وجد کسی بیرونی
و سے دائرہ کو بالترتیب نقاط ا ، ب اور ج ، د میں کاٹتے
کھینچے گئے ہیں ثابت کرو کہ مثلث داج اور وبد متشابہ
اور نتیجہ ثابت کرو کہ دا × دب=وج × ود
(مشق 92 سوال 2

9 (ا) ثابت کرو کہ دو متشابہ مثلثوں کے رقبوں میں وہی نسبت
جو ان کے متناظرہ ضلعوں کے مربعوں میں ہوگی -
(مسئلہ

(ب) ابج ایک مثلث ہے جس میں زاویہ ب قائمہ ہے - اج
عمود گرایا گیا ہے ثابت کرو کہ :—

1953

ھدایات (1) پہلا اور دوسرا سوال لازمی ھیں - سوالات (3) تا (10) میں سے کوئی سے پانچ سوال مزید حل کیجئے -

(2) پہلے دو سوالوں میں

(1) ثبوت دینے کی ضرورت نہیں -

(2) مدارج عمل واضح ہونے چاھئیں -

(3) سٹ سکوئر اور پروٹریکٹر کے استعمال کی اجازت نہیں -

1 (ا) ایک مثلث ا ب ج بنائیے جب ا ب = 7·2 سم ' ا ج = 6·4 سم اور ب ج = 5·7 سم - ایک ایسا دائرہ کھینچو جو مثلث کے راسی نقاط ا ' ب ' ج میں سے گزرتا ہو -

(ب) ایک ذواربعتہ الاضلاع (چوکور) ا ب ج د کھینچئے جس میں ا ب = 3·2 سم ' ب ج = 4·5 سم ' ج د = 5·4 سم ' ا د = 4·1 سم اور زاویہ ب = 90° اس ذواربعتہ الاضلاع کو ایک ایسے مثلث میں تحویل کیجئے - جو رقبہ میں اس کے برابر ہو -

2 مندرجہ ذیل میں سے صرف دو جزو حل کیجئے :—

(ا) ایک دائرہ کھینچئے جس کا نصف قطر ″1·4 ہو - اس دائرے کے دو ایسے مماس کھینچئے جو ایک دوسرے کے ساتھ 60° کا زاویہ بناتے ہوں -

(ب) بذریعہ ھندسہ 10 اور 5 کا وسط فی التناسب معلوم کیجئے -

(ج) 6·3 سم لمبا ایک خط مستقیم کھینچئے - اس خط کی 3 : 4 سے داخلی تقسیم کیجئے اور اس طرح خط کے جو دو حصے بنتے ہوں ان سے ایک مستطیل بنائیے -

3 (ا) ثابت کرو خطوط مستقیم جو کسی ایک ھی خط مستقیم کے متوازی ہوتے ھیں - وہ آپس میں بھی متوازی ہوں گے -

(ب) ثابت کرو کہ جن دو زاویوں کے متناظرہ بازو متوازی ہوتے ھیں وہ یا تو آپس میں متوازی ہوں گے یا ان کا مجموعہ دو قائموں کے برابر ہوگا -

4 (ا) ثابت کرو کہ مثلث کے زاویوں کا مجموعہ دو قائموں کے برابر ہوتا ھے - (بغیر ثابت کیے یہ مت فرض کرو کہ مثلث کا ایک خارجی زاویہ مقابل کے داخلی زاویوں کے مجموعہ کے برابر ہوتا ھے) -

(ب) ا ب ج ایک متساوی الساقین مثلث ھے - جس میں ا ب = ا ج ' ب د زاویہ ب کا ناصف ھے جو ا ج کو نقطہ د پر قطع کرتا ھے - نیز ب د = ا ب تو بتاؤ کہ زاویہ ا کتنے درجے کا ھے ؟

5 (ا) اگر ایک مثلث کے دو زاویے غیر مساوی ہوں - تو ثابت کرو کہ بڑے زاویے کے مقابل بڑا ضلع ہوگا -

(ب) ثابت کرو کہ مثلث کے کوئی سے دو ضلعوں کا مجموعہ تیسرے ضلعے سے بڑا ہوتا ھے -

6 (ا) جبریہ متماثلہ $(ا + ب)^2 = ا^2 + 2 ا ب + ب^2$ کی ھندسی تاویل و تشریح کرو -

(ب) ثابت کرو کہ کسی خط پر کا مربع اُس خط کے نصف پر کے سے چار گنا ہوتا ہے ۔

7 (ا) ثابت کرو کہ کسی دائرے میں ایک ہی قوس پر واقع مر زاویہ محیطی زاویے سے دوگنا ہوتا ہے ۔

(ب) ابجد ایک ذوار بعۃ الاضلاع ہے ۔ جس میں اب=اج=اد؛ ثابت کرو کہ زاویہ باد=2 (زاویہ جبد+ زاویہ جدب)

8 (ا) اگر کسی دائرے کے دو وتر ایک دوسرے کو دائرے کے اندر قطع کریں تو ثابت کرو کہ ایک وتر کے دونوں حصوں کا مستطیل دوسرے وتر کے دونوں حصوں کے مستطیل کے برابر ہوگا ۔

(ب) اگر کسی دائرے کے دو وتر ایک دوسرے کی تنصیف کر ہوں تو ثابت کرو کہ وہ قطر ہوں گے ۔

9 (ا) ثابت کرو کہ دو متشابہ مثلثوں کے رقبوں میں وہی نسبت ہوتی ہے جو اُن کے متناظرہ ضلعوں پر کے مربعوں میں ہوتی ہے ۔

(ب) دو متساوی الساقین مثلثوں میں راس کے زاویے برابر اُن کے رقبوں میں 49 : 121 کی نسبت ہے ۔ اُن کے ارتفاعوں کا مقابلہ کرو ۔

10 (ا) ثابت کرو کہ اس نقطے کا طریق جو دو متقاطع خطوط مساوی الفاصلہ ہو خطوط کا ایک ایسا جوڑا ہے جو دیے ہوئے خطوط کے درمیانی زاویوں کی تنصیف کرتے ہیں ۔

(ب) اب اور اج ایک نمائش کے دو متصلہ کناروں کے ساتھ ساتھ دو سیدھی سڑکیں ہیں ۔ جن کی لمبائی ترتیب وار 400 گز اور 300 گز ہے ۔ اور وہ مقام ا پر ایک دوسرے کے ساتھ 80° کا زاویہ بناتی ہیں ۔ سڑک اب کے کنارے پر دو بنگلے ہیں ۔ جو مقام ب سے بالترتیب 100 گز اور 300 گز کے فاصلے پر واقع ہیں ۔ اس نمائش کے میدان میں ایک فوارہ تعمیر کرنا ہے ۔ جو (1) ان دونوں سڑکوں سے یکساں فاصلے پر ہو اور (2) ان دونوں بنگلوں سے یکساں فاصلے پر ہو ۔
ان شماریات کے مطابق ایک خاکہ کھینچو اور فوارے کے مقام کو متعین کرو ۔ نیز ہندسی ثبوت سے اس مقام کی تصدیق کرو ۔
پیمانہ ایک انچ=100 گز

1954

1 (ا) ایک مثلث بنائیے جس کا مجموعۃ الاضلا (احاطہ) 102

2 (ا) ایک معین بنائیے جس کے وتر 7 سم اور 9 سم ہوں - اس کے اندر ایک ایسا دائرہ کھینچئے جو اس کے اضلاع کو مس کرتا ہو -

(ب) دو دائرے کھینچئے جن کے نصف قطر ترتیب وار 3·1 سم اور 4·4 سم ہوں اور جن کا مرکزی فاصلہ 6·2 سم ہو - ان دائروں کا ایک خط مستقیم مشترک خط مماس کھینچئے - اس خط مماس کی لمبائی بذریعہ پیمائش یا حسابیہ عمل معلوم کیجئے -

(ج) ہندسی طریق سے $\frac{2\cdot5\times1\cdot4}{3\cdot5}$ کی قیمت معلوم کیجئے -

3 (ا) اگر ایک مثلث کے دو ضلعے غیر مساوی ہوں تو ثابت کیجئے کہ بڑے ضلعے کے مقابل بڑا زاویہ ہوگا -

(ب) ثابت کیجئے کہ ایک مختلف الاضلاع مثلث کے سب سے بڑے ضلعے کے مقابل کا زاویہ ہمیشہ 60° سے بڑا ہوتا ہے -

4 (ا) ثابت کیجئے کہ متوازی الاضلاع کے مقابل کے اضلاع مساوی ہوتے ہیں - اور اس کے وتر ایک دوسرے کی تنصیف کرتے ہیں -

(ب) ثابت کیجئے کہ متوازی الاضلاع کے متصلہ زاویوں کے ناصف باہم عمود ہوتے ہیں -

5 (ا) ثابت کیجئے کہ مثلث کے وسطانیے ہم نقطہ ہوتے ہیں - نیز نقطۂ تقاطع کا خصوصی (ہندسی یا طبعی) نام تجویز کیجئے -

(ب) اگر کسی مثلث کے دو وسطانیے آپس میں برابر ہوں تو ثابت کیجئے کہ وہ مثلث متساوی الساقین ہے -

6 (ا) ثابت کیجئے کہ مثلث قائم الزاویہ کے وتر پر کا مربع اس کے باقی دونوں ضلعوں کے مربعوں کے مجموعے کے برابر ہوتا ہے -

(ب) ا ب ج ایک مثلث نما قطعہ اراضی ہے جس کے اضلاع ا ب ، ب ج ، ج ا ترتیب وار 30 گز ، 50 گز اور 40 گز ہیں - یوم آزادی کے موقع پر پاکستانی جھنڈا ایک ایسے پول پر لہرایا گیا جو ضلع ب ج میں مقام پ پر نصب تھا - اگر ا پ ضلع ب ج پر عمود ہو تو پول کے نچلے سرے کا فاصلہ تینوں راسی نقاط سے الگ الگ معلوم کیجئے -

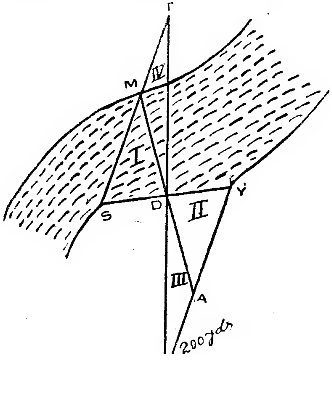
7 (ا) ثابت کیجئے کہ مساوی دائروں میں اگر دو قوسیں برابر ہوں تو ان کے وتر بھی برابر ہوں گے - اس کے عکس کا دعویٰ عام بھی تحریر کیجئے -

(ب) اگر کسی متدائر ذوا ربعتہ الاضلاع کے آمنے سامنے کے ضلعوں کا ایک جوڑا متوازی ہو تو ثابت کیجئے کہ اس کے وتر برابر ہیں -

8 (ا) اگر ایک ذواربعتہ الاضلاع کے متقابلہ زاویوں کا مجموعہ دو قائمے ہو تو ثابت کیجئے کہ وہ ذواربعتہ الاضلاع متدائر ہوگی -

(ب) اگر کسی ذواربعتہ الاضلاع کا ایک ضلع بڑھایا جائے اور اس طرح جو خارجہ زاویہ بنتا ہے وہ متقابل کے داخلہ زاویے کے برابر ہو تو ثابت کیجئے کہ ذواربعتہ الاضلاع متدائر ہوگی -

9 (ا) اگر دو مثلث متساوی الزاویہ ہوں تو ثابت کیجئے کہ
متناظرہ ضلعے متشابہ ہوں گے ۔
(ب) ا ب ج ایک قائم الزاویہ مثلث ہے ۔ زاویہ ا قائمہ ہے ۔ ا
ب ج پر عمود کھینچا گیا ہے ۔ تو ثابت کیجئے کہ ایسا
سے جو دو مثلث بنتے ہیں وہ اصل مثلث ا ب ج کے
ہوں گے اور آپس میں بھی متشابہ ہوں گے ۔
10 (ا) اگر کسی مثلث کے دو زاویے اور ایک ضلع دوسرے مثل
اپنی اپنی نظیر کے دو زاویوں اور ایک ضلع کے برابر ہوں ت
کیجئے کہ مثلث متماثل (منطبق) ہوں گے ۔
(ب) نقاط M اور T کسی دریا کے کنارے پر بالترتیب ایک مس
ایک درخت کو ظاہر کرتے ہوں ۔ ایک عام هندسہ سے د
رکھنے والا سکاؤٹ جو دریا کے دوسرے کنارے پر کھڑ
مسجد اور درخت کے درمیانی فاصلے TM کو بغیر دریا عب
معلوم کرلے کا طریقہ نکالتا ہے ۔ وہ ڈنڈوں کو مقام S ، D ،
B پر ایسے نصب کرتا ہے ۔ کہ TDB—YDS—SMT—
اور YAB سب کے سب خط مستقیم بناتے ہیں ۔
اگر DY=SD
زاویہ S=زاویہ Y
اور AB=200 گز
تو مسجد اور درخت کا درمیانی فاصلہ معلوم کیجئے ۔



1955

ھدایات : (۱) سوالات (1) اور (2) لازمی ھیں - باقی (3) تا (10) سوالات
میں سے کوئی سے پانچ سوالات حل کیجئے -
(۲) پہلے دو سوالوں میں (i) سٹ سکوئر اور پروٹریکٹر کے
استعمال کی اجازت نہیں -
(ii) ثبوت دینے کی ضرورت نہیں مگر
مدارج عمل واضح طور پر دکھانے
چاھئیں -
(iii) پیمانہ تبدیل نہ کیا جائے -

1 (ا) ایک مثلث ا ب ج بنائیے جس کا قاعدہ ب ج = 2·2 انچ ' ضلع ا ب = 2·4 انچ اور زاویہ ب ج ا 30 درجے کا ھو - (مسئلہ 30)
نقطہ ب سے ضلع ج ا پر عمود گرائیے اور اس کی لمبائی ناپئے - (مسئلہ 24)

(ب) ایک چوکور ا ب ج د بنائیے جس کے اضلاع ا ب = 3 سم ' ب ج = 4 سم ' ج د = 4·2 سم ' د ا = 2·8 سم ھوں اور زاویہ ا ب ج 90 درجے کا ھو -
اس چوکور کے ھم رقبہ ایک مثلث بنائیے - (مسئلہ 33 ' 35)

یا

(ب) دو دائرے کھینچئے جن کے نصف قطر ترتیب وار دو انچ اور ایک انچ ھوں اور جن کا مرکزی فاصلہ چار انچ ھو - ان دائروں کا ایک مستقیم مشترک خط مماس کھینچئے - اس خط مماس کی لمبائی بذریعہ پیمائش معلوم کیجئے -
(مسئلہ 84 سوال 61)

2 مندرجہ ذیل تین اجزا میں سے کوئی سے دو اجزا حل کیجئے -
(ا) ایک مثلث بنائیے جس کے اضلاع 2·5 انچ ' 2·5 انچ ' 3 انچ ھوں - اس مثلث کا دائرہ محیط (مثلث کے راسوں میں سے گزرتا ھوا دائرہ) بنائیے - (مسئلہ 27 ' 85)

(ب) ھندسی طریق سے $\frac{{}^2(1·5)}{2·5}$ کی قیمت معلوم کیجئے جبکہ اکائی کی لمبائی ایک انچ ھو - (سوال 3 ج صفحہ 375)

(ج) ایک زاویہ 75 درجے کا بنائیے - ایک انچ نصف قطر کا دائرہ کھینچئے جو اس کے بازؤں کو مس کرے -
(سوال 7 صفحہ 348)

3 (ا) ثابت کیجئے کہ مثلث کے تینوں زاویوں کا مجموعہ دو قائموں کے برابر ھوتا ھے - (مسئلہ 8)

(ب) ایک مثلث ا ب ج میں خارجہ زاویہ ب کا ناصف اور ،
ج کا ناصف نقطہ د پر ملتے ھیں - ثابت کیجئے کہ زاو
(زاویہ ا)- (سوال

4 (ا) اگر دو قائم الزاویہ مثلثوں کے وتر برابر ھوں اور ہم
ضلع دوسرے کے ایک ضلع کے برابر ھو تو ثا
کہ دونوں مثلث منطبق ھوں گے -

(ب اگر کسی مساوی الساقین مثلث کے راس سے قاعد
گرایا جائے تو ثابت کیجئے کہ یہ عمود قاعدے ا
دونوں کی تنصیف کرے گا - (سوال

5 (ا) ثابت کیجئے کہ مساوی قاعدے اور مساوی ارتفاع
رقبے میں برابر ھوں گے -

(ب) ثابت کیجئے کہ متوازی الاضلاع کے وتر متوازی ا
چار ایسی مثلثوں میں تقسیم کرتے ھیں جو رقبہ میں
ھوتی ھیں - (سوال 6

6 (ا) ثابت کیجئے کہ دو متعینہ نقاط سے مساوی الفاص
طریق ان متعینہ نقاط کو ملانے والے خط کا عم
ھوتا ھے -

(ب) ایک چوکور ا ب ج د میں ضلع ا ب=ضلع ب ج ، اضلا
د ا کے عمودی ناصف نقطہ م پر ملتے ھیں - ثابت
خط ب م زاویہ ا ب ج کی تنصیف کرتا ھے -
(سوال 8

7 (ا) اگر کسی دائرے کی ایک قوس دائرے کے مرکز پ
بنائے تو ثابت کیجئے کہ یہ زاویہ اس کا دو چن
جسے وھی قوس بقیہ محیط کے کسی نقطہ پر بنائے -

(ب) دو مساوی دائرے ایک دوسرے کو نقاط ج اور د پر
ھیں - نقطہ ج سے ایک خط ا ج ب کھینچا گیا ھے
کو نقاط ا اور ب پر کاٹتا ھے - ثابت کیجئے کہ
مساوی الساقین مثلث ھے - (سوال 5

8 (ا) اگر کوئی خط مستقیم دائرے کو مس کرے اور
میں ایک وتر کھینچا جائے تو ثابت کیجئے کہ وتر
کے درمیانی زاویے متبادلہ قطعات کے زاویوں کے برابر

(ب) دو دائرے ایک دوسرے کو بیرونی طور پر نقطہ
کرتے ھیں - ایک خط ا ک ب کھینچا گیا ھے جو ا
کو نقطہ ا پر اور دوسرے دائرہ کو نقطہ ب پر
ایک دوسرا خط ج ک د کھینچا گیا ھے جو پہلے
نقطہ ج پر اور دوسرے دائرہ کو نقطہ د پر

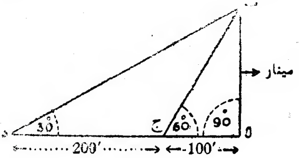
ثابت کیجئے کہ وتر اج وتر ب د کے متوازی ہے- (سوال 7 صفحہ 289)

9 (ا) اگر دو مثلثوں میں سے ایک مثلث کا ایک زاویہ دوسرے مثلث کے ایک زاویے کے برابر ہو اور مساوی زاویوں کے گرد کے ضلعے باہم متناسب ہوں تو ثابت کیجئے کہ وہ مثلث متشابہ ہوں گے - (مسئلہ 93)

(ب) دو خطوط اب اور ج ہ کو اس طرح بڑھایا گیا ہے کہ وہ نقطہ و پر کاٹتے ہیں اور وا : ود=وج : وب -
ثابت کیجئے کہ ا ب د ج ایک متدائر چوکور ہے -
(سوال 2 صفحہ 361)

10 (ا) ثابت کیجئے کہ ایک قائم الزاویہ مثلث کے وتر پر کا مربع اس کے باقی دونوں ضلعوں کے مربعوں کے مجموعے کے برابر ہوتا ہے -
(مسئلہ 50)

(ب) اب ایک مینار ہے - مینار کے قاعدہ ا سے 100 فٹ کے فاصلے پر ایک نقطہ ج سے ایک آدمی نے دیکھا کہ مینار زاویہ اج ب 60 درجے کا بناتا ہے - مینار سے اور دور وہ آدمی ج د فاصلہ 200 فٹ کے برابر اج کی سیدھ میں طے کرتا ہے اور اب دیکھتا ہے کہ زاویہ ادب 30 درجے کا ہے -
مینار کی بلندی معلوم کیجئے اور جواب صحیح فٹوں میں دیجئے -
(مسئلہ 52 کا استعمال)



1956 (گروپ اے)

ہدایات (۱) سوالات (1) اور (2) لازمی ہیں - باقی (3) تا (10) سوالات میں سے کوئی سے پانچ سوالات حل کیجئے -

(۲) پہلے دو سوالوں میں (i) سٹ سکوائر اور پروٹریکٹر کے استعمال کی اجازت نہیں -

(ii) ثبوت دینے کی ضرورت نہیں مگر مدارج عمل واضح طور پر دکھالے چاہئیں -

(iii) پیمانہ تبدیل نہ کیا جائے -

1 (ا) ایک مثلث ا ب ج بنائیے جس کا ضلع ا ب = 2 انچ ' زاویہ ا ب ج = 45 درجے اور زاویہ ج ا ب = 60 درجے - (مسئلہ 29)

زاویہ ا ب ج اور زاویہ ج ا ب کے بیرونی ناصف کھینچئے جو آپس میں نقطہ د پر ملیں - (مسئلہ 21)

نقطہ د سے ضلع ا ب پر عمود گرائیے - (مسئلہ 24)

یا

ایک مثلث بنائیے جس کا احاطہ 10 سم ہو اور جس کے قاعدے پر کے زاویے 45 درجے اور 60 درجے کے ہوں -

(سوال 16 صفحہ 133 ' 132)

(ب) ایک دائرہ کھینچئے جس کا نصف قطر 1·5 انچ کے برابر ہو - دائرے کے مرکز سے 2·5 انچ کے فاصلے پر کسی نقطہ سے دائرے کا خط مماس کھینچئے - اس خط مماس کی لمبائی بذریعہ پیمائش معلوم کیجئے - (مسئلہ 72)

2 مندرجہ ذیل تین اجزا میں سے کوئی سے دو اجزا حل کیجئے :

(ا) ہندسی طریق سے $\frac{1 \times 1{\cdot}5}{2{\cdot}5}$ کی قیمت معلوم کیجئے جبکہ اکائی کی لمبائی ایک انچ ہو - (سوال 3 صفحہ 375)

(ب) ایک متوازی الاضلاع بنائیے جس کے وتر تین انچ اور چار انچ کے برابر ہوں اور جس کا ایک ضلع تین انچ کے برابر ہو -

(سوال 99 صفحہ 172)

اس متوازی الاضلاع کے ہم رقبہ ایک مربع بنائیے -

(سوال 1 صفحہ 229)

(ج) ایک خط ا ب 2·5 انچ کے برابر لیجئے - نقطہ ب پر ایک خط ب ج کھینچئے جو ا ب کے ساتھ زاویہ ا ب ج 30 درجے کا بنائے -

ایک ایسا دائرہ کھینچئے جس کا مرکز خط ب ج پر واقع ہو اور جو نقاط ا اور ب میں سے گزرے -

(سوال 3 صفحہ 352)

3 (ا) اگر ایک خط قاطع دو متوازی خطوط مستقیم کو قطع کرے تو ثابت کیجئے کہ متبادلہ زاویے آپس میں برابر ہوں گے -

(مسئلہ 6)

(ب) ایک چوکور کے مقابل کے دو اضلاع برابر اور متوازی ہیں ثابت کیجئے کہ یہ چوکور متوازی الاضلاع ہے -

(زیر استعمال مسئلہ 18)

4 (ا) اگر کسی مثلث کے دو زاویے اور ایک ضلع دوسرے مثلث کے اپنی اپنی نظیر کے دو زاویوں اور ایک ضلع کے برابر ہوں تو ثابت

1960 (گروپ الف)

1 (ا) ایک دائرہ جس کا نصف قطر "1·5 ہو۔ کے اندر ایک مثلث بنائیے جو ایسے مثلث کا متساوی الزاویہ ہو جس کے اضلاع 1·8 سم اور 2·5 سم ہوں۔ اس کے اضلاع کی پیمائش کیجئے۔

(ب) ایک مربع بنائیے جس کا وتر "1·5 ہو۔

2 (ا) ایک مثلث بنائیے جس کا قاعدہ "2·4 ہو اور قاعدہ پر کے زاویے °60 اور °45 ہوں۔

(ب) اس مثلث کا دائرہ محیط کھینچیے اور اس کا نصف قطر ناپیے۔

3 (ا) دو دائروں کے نصف قطر 1·4 سم اور 0·6 سم ھیں ان کے معکوس مشترک خط مماس ایک دوسرے کے ساتھ °60 کا زاویہ بناتے ھیں۔ وہ دائرے کھینچیے۔ ان کے مرکزوں کے درمیان فاصلہ ناپیے۔

(ب) ایک "2 لمبے خط کو $\frac{1}{2}$ اور $\frac{1}{3}$ کی نسبت سے داخلی طور پر تقسیم کیجئے۔

4 (ا) ھندسی طریق سے $2·3 \times 1·8$ کی قیمت دریافت کیجئے۔

(ب) 9 سم اور 4 سم کا وسط فی التناسب ھندسی طریق سے دریافت کیجئے اور اپنے جواب کی پڑتال کیجئے۔

دوسرا حصہ

5 (ا) ثابت کیجئے کہ مثلث کے تینوں زاویوں کا مجموعہ دو قائموں کے برابر ھوتا ھے۔

(ب) اگر ایک خط مستقیم دو متوازی خطوط کو قطع کرے اور ان دو اندرونی زاویوں کی جو خط قاطع کے ایک ھی جانب ھوں تصنیف کی جائے۔ تو ثابت کیجئے کہ ناصف ایک دوسرے کو قائم الزاویہ پر ملیں گے۔

6 (ا) ثابت کیجئے کہ کسی مثلث میں حادہ زاویے کے مقابل کے ضلع پر کا مربع باقی دو ضلعوں پر کے مربعوں سے چھوٹا ھوتا ھے۔ بقدر دو چند اس سطح کے جو باقی دو ضلعوں میں سے ایک ضلع اور اس پر دوسرے ضلعے کا ظل مل کر بناتے ھیں۔

(ب) ثابت کیجیے کہ ایک مثلث کے وسطانیوں کے مربعوں کا چار چند اس کے اضلاع کے مربعوں کے مجموعے کا سہ چند ھوتا ھے۔

7 (ا) ثابت کیجیے کہ متوازی الاضلاع جو ایک ہی قاعدہ پر ہوں اور جن کے ارتفاع مساوی ہوں۔ رقبے میں باہم مساوی ہوتے ہیں ۔

(ب) اگر ایک متوازی الاضلاع اور ایک مستطیل ایک ہی قاعدہ پر ایک ہی متوازی خطوط کے درمیان واقع ہوں ۔ تو ثابت کیجیے کہ مستطیل کا احاطہ متوازی الاضلاع کے احاطہ سے چھوٹا ہو گا ۔

8 (ا) ثابت کیجیے اگر کوئی خط مستقیم دائرے کو مس کرے اور نقطہ مماس میں سے ایک وتر کھینچا جائے ۔ تو وتر اور مماس کے درمیانی زاویے متبادلہ قطعات کے زاویوں کے برابر ہوں گے ۔

(ب) کسی دائرے کا ایک مماس ایک وتر کے متوازی کھینچا گیا ہے ۔ ثابت کیجیے کہ نقطہ مماس وتر کے قوس کی تصنیف کرتا ہے۔

9 (ا) اگر کسی مثلث کے دو زاویے اور ایک ضلع دوسرے مثلث میں اپنی اپنی نظیر کے دو زاویوں اور ایک ضلع کے برابر ہوں تو ثابت کیجیے کہ دونوں مثلث منطبق ہوں گے ۔

(ب) مثلث ابج کے اضلاع اب اور اج کے ناصف ک پر ملتے ہیں ثابت کیجیے کہ ک تینوں اضلاع سے مساوی الفاصلہ ہے ۔

10 (ا) ثابت کیجیے کہ مثلث کے نقاط راس سے جو عمود مقابل کے ضلعوں پر کھینچے جائیں وہ ایک ہی نقطے پر ملتے ہیں ۔

(ب) $(ا+ب)(ا-ب)=ا^2-ب^2$ کا متماثل مسئلہ ہندسی بیان کیجیے اور بذریعہ شکل اس کی توضیح کیجیے ۔

11 (ا) ثابت کیجیے کہ اس نقطے کا طریق جو دو متقاطع خطوط سے مساوی الفاصلہ ہو وہ خط ہوتے ہیں۔ جو متقاطع خطوط کے درمیانی زاویوں کی تنصیف کرتے ہیں ۔

(ب) وہ نقطہ دریافت کیجیے جو متقاطع خطوط سے مساوی الفاصلہ ہو اور جو دو قائم نقطوں سے بھی مساوی الفاصلہ ہو۔

12 (ا) ثابت کیجیے کہ اگر کوئی قوس ایک زاویہ مرکز پر اور دوسرا زاویہ محیط کے باقی حصے میں کسی نقطہ پر بنائیے ۔ تو مرکز کا زاویہ محیط پر کے زاویے سے دگنا ہوتا ہے ۔

(ب) ا ب او ا ج ایک دائرہ جس کا مرکز م ہے ۔ کے مساوی وتر ہیں ۔ ا د ایک اور وتر ہے ۔ جو ب ج کو ل پر قطع کرتا ہے ۔ ثابت کیجیے کہ زاویہ ا ل ج $=\frac{1}{2}$ زاویہ ا م د ۔

1960 (گروپ ب)

(پہلا حصہ)

1 (ا) ایک چوکور ا ب ج د بنائیے جس میں ا ب = 4 سم ، ب ج = 3 سم ، ج د = 3 سم ، د ا = 5 سم اور زاویہ ا ب ج = 90° خط ا ج کو ناپئے اور پھر بتائیے کہ مثلث ا ج د کس قسم کی مثلث ہے ۔

(ب) ایک خط ک ل ایک انچ لمبا لیجیے اور اس پر ایک چوکور ک ل م ن بنائیے جو چوکور ا ب ج د کے متشابہ ہو ۔

2 (ا) ایک مثلث بنائیے جس کا مجموعہ الاضلاع (یعنی احاطہ) 5 انچ ہو اور قاعدہ پر کے زوایے 60 اور 45 درجے کے ہوں ۔

(ب) ایک خط کھینچیے جس کی لمبائی $\sqrt{3}$ انچ ہو ۔

3 ایک دائرہ کھینچیے جس کا نصف قطر 3 سم ہو ۔ مرکز سے 5 سم کی دوری پر ایک نقطہ ل لیجیے اور وہاں سے دائرے کے مماس کھینچیے مماس کی لمبائی بھی بتائیے ۔

4 (ا) 2.3 سم لمبے خط مستقیم کی داخلی طور پر طرفی و وسطی تقسیم کیجیے ۔

(ب) ایک دائرہ کھینچیے جو تین دئے ہوئے نقطوں میں سے گزرے نقطے ایک خط مستقیم پر تین ہیں ۔

(دوسرا حصہ)

5 (ا) ثابت کیجیے کہ ایک مثلث کے تینوں زاویوں کا مجموعہ دو قائم الزاویہ کے برابر ہوتا ہے ۔

(ب) ا ب ج ایک مثلث ہے ۔ جس میں زاویہ ا ب ج = 90° ؛ ب سے ب د وتر ا ج پر عمود گرایا گیا ہے ۔ ثابت کیجیے کہ مثلث ا ب د اور مثلث ب ج د مساوی الزاویہ ہیں ۔

6 (ا) اگر دو قائم الزاویہ مثلثوں کے وتر اور ایک ایک ضلع برابر ہوں تو یہ دونوں مثلثیں ہر لحاظ سے برابر ہوتی ہیں ۔

اگر یہ عمود برابر ہوں تو ثابت کیجیے کہ م ب زاویہ ا ب ج کا متناصف ہوتا ہے -

7 (ا) اگر کسی مثلث کے ایک ضلع پر کا مربع باقی ضلعوں پر کے مربعوں کے مجموعہ کے برابر ہو - تو یہ مثلث قائم الزاویہ مثلث ہوتی ہے -

(ب) کسی مثلث کے قاعدے کے نقطہ وسط سے باقی ضلعوں پر عمود گرائے گئے ہیں اگر یہ برابر ہوں تو یہ مثلث متساوی الساقین ہو گی -

8 (ا) مثلث منفرجہ الزاویہ میں زاویہ منفرجہ کے مقابل کے ضلع پر کا مربع باقی ضلعوں پر کے مربعوں کے مجموعہ اور اس سطح کے دو چند کے برابر ہوتا ہے- جو ان دو ضلعوں میں سے ایک ضلع اور اس پر دوسرے ضلع ظل سے بنتی ہے -

(ب) ا ب ج ایک مثلث ہے - جس کا زاویہ ب منفرجہ ہے - اگر ج ب اور ا ب پر بالترتیب ا ی اور ج ع عمود ہوں تو ثابت کیجیے کہ ا ب × ب ج = ج ب × ب ی -

9 (ا) مساوی دائروں میں مساوی قوسوں کے وتر مساوی ہوتے ہیں-

(ب) ایک دائرے میں قوس ا ب = قوس ب ج = قوس ا ج ، ثابت کیجیے کہ ا ب ج متساوی الساقین مثلث ہے -

10 (ا) اگر کسی دائرے کے بیرونی نقطہ سے ایک مماس اور ایک قاطع دائرہ کھینچا جائے - تو مماس پر کا مربع اس سطح کے برابر ہوتا ہے - جو اس قاطع دائرہ اور اس قاطع دائرہ کے اس حصے سے بنتی ہو جو دائرہ سے خارج ہو -

(ب) ثابت کیجیے کہ دد متقاطع دائروں کا قاطع مشترک خارج ہو کر مماس مشترک کا ناصف ہوتا ہے -

11 (ا) اگر تین یا زیادہ متوازی خطوط مستقیم کسی خط قاطع پر مساوی ٹکڑے کاٹیں تو ثابت کیجیے کہ وہ ہر خط قاطع پر آسی لظیر کے مساوی ٹکڑے کاٹیں گے -

(ب) ایک مثلث ا ب ج میں ا سے گزرتا ہوا ایک خط مستقیم کھینچا گیا ہے - پھر اس پر ج اور ب سے ج م اور ب ل عمود گرائے گئے ہیں - د خط ب ج کا نقطہ وسطی ہے - ثابت کیجیے کہ د م = د ل -

12 (ا) اگر دو مثلث مساوی الزاویہ ہوں تو دونوں مثلث متشابہ ہوتی ہیں -

(ب) کسی بیرونی نقطہ ط سے م مرکز والے دائرے پر ط ا اور ط ب دو مماس بنائے گئے ہیں - اگر ط م ، ا ب کو نقطہ ع پر قطع کرے تو ثابت کیجیے کہ م ط × م ع = م ا^2 -

1961 (گروپ ا)

1 (ا) ایک مثلث ا ب ج بنائیے - جس میں ضلع ا ب = 6·8 سم، ضلع ا ج = 4·8 سم اور زاویہ ج 90 درجے کا ہو - ب ج کا عمودی ناصف کھینچیے جو ضلع ا ب کو نقطہ ل پر قطع کرے ج ل کی پیمائش کیجیے -

یا

(ا) ایک مثلث بنائیے - جس کے ضلعوں کا مجموعہ (یعنی احاطہ) 5 انچ کے برابر ہو - اور اس کے ضلعوں کی نسبت 2 : 3 : 4 کی ہو -

(ب) ایک دائرہ کھینچیے جس کا نصف قطر 1·5 انچ کے برابر ہو - اس کے مرکز کو نقطہ ج سے ظاہر کیجیے - اس دائرہ کی ایک قوس ا ب قطع کیجیے جو دائرہ کے مرکز ج اور قائم الزاویہ بنائے - نقاط ا اور ب پر دائرہ کے دو مماس کھینچیے جو ایک دوسرے کو نقطہ د پر ملیں - بتائیے کہ ا ب ج د کس قسم کی چوکور ہے -

2 مندرجہ ذیل چار اجزاء میں سے کوئی سے دو اجزا حل کیجیے -

(ا) ایک متساوی الاضلاع مثلث بنائیے - جس کا ہر ایک ضلع 2·5 انچ کے برابر ہو اس کے اندر ایک ایسا دائرہ کھینچیے جو مثلث کے تینوں ضلعوں کو مس کرے -

(ب) 1·8 انچ ، 2·3 انچ اور 3·6 انچ کا هندسی طریق سے چوتھا خط کھینچیے اس کی پیمائش بھی کیجیے -

(ج) 1·8 انچ نصف قطر والے دائرے کے اندر ایک مسدس (چھ ضلعوں والی) منتظم ا ب ج د ر س کھینچیے - نقاط ا د اس میں مل کر خط ا د کی لمبائی معلوم کرو -

(د) ایک مستطیل بنائیے جس کے دو ضلعے 9 سم

3 (ا) اگر ایک مثلث کے دو ضلعے اور ان دو ضلعوں کا درمیانی زاویہ دوسری مثلث کے دو ضلعوں اور ان کے درمیانی زاویے کے ترتیب وار برابر ہوں تو ثابت کیجیے وہ مثلثیں منطبق ہونگی ۔

(ب) دو خطوط ا ب اور ج د ایک دوسرے کے باہم نقطہ تقاطع پر تنصیف کرتے ہیں ۔ ثابت کیجیے کہ چوکور ا د ب ج متوازی الاضلاع ہو گی ۔

4 (ا) اگر ایک مثلث کا ایک زاویہ اس کے دوسرے زاویے سے بڑا ہے تو ثابت کیجیے کہ بڑے زاویے کے مقابل کا ضلع بڑا ہو گا ۔ چھوٹے زاویے کے مقابل کے ضلعے سے ۔

(ب) ا ب ج ایک مثلث ہے ۔ خط ا د زاویہ ا کا ناصف ہے ۔ اور مقابل کے ضلعے ب کو نقطہ د پر ملتا ہے ۔ ثابت کیجیے کہ (i) ا ب بڑا ہے ب د سے (ii) ا ج سے بڑا ہے ج د سے ۔

5 (ا) ثابت کیجیے کہ ہم قاعدہ مثلث جس کے ارتفاع بھی مساوی ہوں رقبے میں باہم برابر ہوتے ہیں ۔ یا

(ا) ثابت کیجیے کہ مساوی قاعدے اور مساوی ارتفاع والے مثلث رقبے میں باہم برابر ہوتے ہیں ۔

(ب) ایک چوکور ا ب ج د میں ضلع ا ب متوازی ہے ۔ ضلع د ج کا مگر یہ دونوں ضلعے آپس میں برابر نہیں ہیں ۔ نقاط ل اور م اضلاع ا ب اور ج د کے نقاط تنصیف ہیں ۔ ثابت کیجیے کہ خط ل م چوکور ا ب ج د کو دو مساوی حصوں میں تقسیم کرتا ہے ۔

6 (ا) ا ب ج مثلث میں ا د اس کا وسطانیہ ہے ۔ ثابت کیجیے کہ (ا ب)^2 + (ا ج)^2 = 2(ا د)^2 + 2 (ب د)^2 ۔

(ب) ثابت کیجیے ایک متوازی الاضلاع چوکور کے چاروں ضلعوں پر کے مربعوں کا مجموعہ اس متوازی الاضلاع کے دونوں وتروں پر کے مربعوں کے مجموعے کے برابر ہوتا ہے ۔

7 (ا) ثابت کیجئے ایک دائرہ کے مساوی وتر مرکز سے برابر فاصلے پر ہوتے ہیں ۔

(ب) دو ہم مرکز دائرے کھینچے گئے ہیں ۔ جو بیرونی دائرہ کو نقاط ا ، ب اور نقاط ج ، د پر قطع کرتے ہیں ۔ ثابت کیجئے کہ ا ب = ج د ۔

8 (ا) اگر دو مساوی زاویے ایک ہی قاعدہ پر واقع ہوں ۔ اور قاعدہ کے ایک ہی طرف واقع ہوں تو ثابت کیجئے کہ زاویوں کے راس اور قاعدے کے سرے ہم دائرہ ہوتے ہیں ۔

(ب) ا ب ج ایک مثلث ہے ۔ ا سے مقابل کے ضلع ب ج پر ا ل عمود کھینچا گیا ہے ۔ ثابت کیجئے کہ چاروں نقاط ا ، ب ، ل ، م ایک ہی دائرہ پر واقع ہیں ۔ اور اس دائرے کا مرکز ضلع ا ب کا نقطہ تنصیف ہوگا ۔

9 (ا) اگر دو مثلثوں میں ایک مثلث کا زاویہ دوسری مثلث کے زاویے کے برابر ہو اور ان مساوی زاویوں کے اضلاع محیط باہم متناسب ہوں تو ثابت کیجئے کہ دونوں مثلثیں متشابہ ہوں گی ۔

(ب) ثابت کیجئے کہ مثلث کے تینوں اضلاع کے وسطی نقاط کو ملانے والے خطوط ایک ایسی مثلث بناتے ہیں ۔ جو بڑی مثلث کے متشابہ ہو گی ۔

10 (ا) ثابت کیجئے کہ اس نقطے کا طریق جو دو قائم لفظوں سے مساوی الفاصلہ ہو وہ عمود ہو گا جو ان قائم نقاط کو ملانے والے خط کی تنصیف کرے گا ۔

(ب) کوئی سے دو دائرے آپس میں ایک دوسرے کو نقاط ل اور م پر قطع کرتے ہیں اور اس طرح سے ل م ان کا مشترک وتر بن جاتا ہے ۔ ثابت کیجئے کہ ان دائروں کے دونوں مراکز کو ملانے والا خط ان کے مشترک وتر ل م کا عمودی ناصف ہوگا ۔

1961 (گروپ ب)

1 (ا) ایک دائرہ بنائیے جس کا نصف قطر 1·5 انچ ہو ۔ اس کے دو مماس ایسے کھینچیے جن کے درمیان 60 درجے کا زاویہ ہو ۔

(ب) ایک معین بنائیے جس کے وتر 4 انچ اور 5 انچ لمبے ہوں اس کے اندر ضلعوں کو مس کرنے والا دائرہ بنائیے ۔ یا

(ب) ایک متوازی الاضلاع ا ب ج د بنائیے جس کے وتر 4 انچ اور 5 انچ لمبے ہوں ۔ اور ان کا درمیانی زاویہ 30 درجے کا ہو ۔ نقطہ ب سے ضلع ج د پر عمود گرائیے اور اس کی پیمائش کیجئے ۔

2 (ا) ایک خط مستقیم لیجئے ۔ اس پر پھر اس کو خارجی طور پر 3:1 پر تقسیم کیجئے ناپ کر بڑے حصے کی لمبائی بتائیے ۔

(ب) ایک خط مستقیم لیجئے اس پر پھر ایک نقطہ ط لیجئے اب ایک ایسا دائرہ کھینچیے جس کا نصف قطر ایک انچ ہو اور وہ دیے ہوئے خط مستقیم کو ط پر مس کرتا ہو -

(ج) ایک مستطیل بنائیے جس کا وتر 2·5 انچ ہو اور ایک ضلع 2 انچ ہو اور پھر اس مستطیل کے برابر ایک مربع بنائیے -

(د) ایک مثلث بنائیے جس کے ضلعے 3 انچ ، 4 انچ اور 5 انچ لمبے ہوں- اور اس مثلث کے زاویوں کے ناصف کھینچیے - کیا یہ ناصف ایک ہی نقطہ سے گزرتے ہیں -

3 (ا) ثابت کیجئے کہ جو خطوط مستقیم کسی ایک ہی خط مستقیم کے متوازی ہوں - وہ باہم متوازی ہوتے ہیں -

(ب) خط ا ب خط ج د کے متوازی ہے - کوئی نقطہ م ان کے درمیان لیا گیا ہے - اور اس کو ب اور د سے ملا دیا گیا ہے - ثابت کیجئے کہ ب م̂ د = ب̂ + د̂

4 (ا) ثابت کیجئے اگر کسی مثلث کے دو ضلعے برابر ہوں تو ان اضلاع کے مقابل کے زاویے بھی برابر ہوتے ہیں -

(ب) ا ب ج د ایک چوکور ہے - جس میں ا ب = ا د اور ب̂ = د̂ ثابت کیجئے کہ ب ج = ج د -

5 (ا) ثابت کیجئے کہ اگر دو متوازی الاضلاعوں کے قاعدے اور ارتفاع برابر ہوں تو ان کے رقبے برابر ہوتے ہیں -

(ب) متوازی الاضلاع ابجد اور متوازی الاضلاع ا ب ط ع ، اب پر واقع ہیں - مگر اس کے مخالف سمتوں میں - ط ج کو قاعدہ ا ب ، م پر تنصیف کرتا ہے (ط ج ، ا ب پر عمود نہیں ہے) ثابت کیجئے کہ ||ع ابجد = ||ع ا ب ط ع -

6 (ا) ثابت کیجئے کہ اس نقطہ کا لوکس (راستہ) جو دو مقررہ نقطوں سے برابر فاصلے پر رہتا ہے - ان دونوں نقطوں کے خط واصل کا عمودی ناصف ہوتا ہے -

(ب) ابج ایک مثلث ہے - اس کے ضلعوں کے عمودی ناصف ایک دوسرے کو م پر ملتے ہیں - ثابت کیجئے کہ م ا = م ب = م ج -

7 (ا) ثابت کیجئے کہ مثلث منفرجہ الزاویہ میں منفرجہ زاویے کے مقابل کے ضلع پر کا مربع باقی دو اضلاع پر کے مربعوں کے مجموعے اور اس سطح کے دو چند کے برابر ہوتا ہے۔ جو ان دو اضلاع میں سے ایک ضلع اور اس پر دوسرے ضلع کے ظل سے بنتی ہو۔

(ب) ا ب ج ایک مثلث ہے۔ جس کا زاویہ منفرجہ ہے۔ اگر ج ب اور ا ب پر بالترتیب ا ی اور ج ع عمود ہوں تو ثابت کیجئے کہ
ا ب × ب ع = ج ب × ب ی۔

8 (ا) ثابت کیجئے کہ اگر کسی چوکور کے مقابل کے زاویوں کا مجموعہ 2 قائمے کے برابر ہو۔ تو اس چوکور کے چاروں راس ایک ہی دائرے پر واقع ہوتے ہیں۔

(ب) ثابت کیجئے کہ ایک متوازی الاضلاع جو دائرے میں کھینچا جائے وہ مستطیل ہوتا ہے۔

9 (ا) ثابت کیجئے کہ اگر ایک دائرے کے محیط پر کسی نقطہ سے ایک مماس اور ایک وتر کھینچے جائیں تو جو زاویے وتر مماس کے ساتھ بناتا ہے۔ وہ قطعات متبادلہ میں کے زاویوں کے برابر ہوتے ہیں۔

(ب) ا ب ج ایک متساوی الساقین مثلث ہے۔ جو دائرے کے اندر بنائی گئی ہے۔ اس میں ا ب = ا ج ثابت کیجئے کہ نقطہ ا پر جو مماس کھینچا جائے گا۔ وہ ب ج کے متوازی ہوگا۔

10 (ا) ثابت کیجئے کہ اگر دو مثلث مساوی الزاویہ ہوں تو ان کے متناظرہ اضلاع متناسب ہوں گے۔

(ب) ایک قائم الزاویہ مثلث ا ب ج میں ا د وتر ب ج پر عمود گرایا گیا ہے۔ ثابت کیجئے کہ ا د^2 = ب د × د ج۔

1962 (گروپ ا)

1 (ا) ایک مثلث بنائیے جس کا قاعدہ 2 انچ کے برابر ہو اور باقی دو اضلاع کا مجموعہ 4 انچ کے برابر ہو اور قاعدہ پر کا ایک زاویہ 75° کا زاویہ ہو۔

(ب) ایک چوکور ا ب ج د بنائیے جس (ا ب = ″2·8)(ب ج = ″3) (ج د = ″2·5) (ا د = ″3·2) اور زاویہ ا = 60° کا ہو ایک خط ل ″1·5 لمبا لیکر ایک چوکور بنائیے۔ جو ا ب د ج کے ہو۔

2 (ا) هندسی طریق سے $\frac{1.5\times1.4}{3.5}$ کی قیمت معلوم کیجئے جبکہ اکائی ایک انچ کے برابر ہو ۔

(ب) 4 سم نصف قطر کے دائرہ میں ایک مثلث بنائیے جس کے زاویے 45° ، 60° اور 75° کے ہوں ۔

(ج) ایک مثلث بنائیے جس کا ضلع ا ب $=3''$ دبج = اج $=2.5''$ نقطہ ب کو مرکز مان کر ایک انچ نصف قطر کا دائرہ لگائیے ۔ اب اس دائرے کا مماس بنائیے ۔ جو ضلع ا ج کے متوازی ہو ۔

(د) ایک خط مستقیم 4.5 سم لمبا لے کر اسے خارجی طور پر 2 : 1 میں تقسیم کریں اس کے چھوٹے حصے کی پیمائش کیجئے ۔

(ه) کوئی سا ایک خط مستقیم لیجئے ایک نقطہ دیجئے جو اس خط مستقیم سے $2''$ کے فاصلے پر ہو ۔ ایک ایسا دائرہ کھینچیے جو نقطہ د میں سے گزرے اور خط مستقیم ا ب کو نقطہ ا پر مس کرے ۔

3 (ا) اگر ایک مثلث کے دو زاویے اور ایک ضلع دوسری مثلث کے اپنی اپنی نظیر کے دو زاویوں اور ایک ضلع کے برابر ہوں تو ثابت کیجئے کہ دونوں مثلث منتبق ہوں گے ۔

(ب) ثابت کیجئے کہ ایک مربع کے وتر ایک دوسرے کی زاویہ قائمہ پر تنصیف کرتے ہیں ۔

4 (ا) مثلث کا رقبہ نکالنے کا کلیہ (رقبہ $=\frac{1}{2}$ قاعدہ × ارتفاع) فرض کیئے بغیر ثابت کیجئے کہ ہم قاعدہ مثلث جن کے ارتفاع مساوی ہوں ، رقبے میں باہم برابر ہوتے ہیں ۔

(ب) ا ب ج د ایک متوازی الاضلاع ہے اور ا ب ر ایک مثلث ہے متوازی الاضلاع اور مثلث کا قاعدہ اب مشترک ہے ۔ اگر ان کے ارتفاع مساوی ہوں تو ثابت کیجئے کہ مثلث کا رقبہ متوازی الاضلاع سے نصف ہو گا ۔

5 (ا) اگر کسی دیئے ہوئے نقطہ سے کسی دیئے ہوئے خط مستقیم تک کئی خط کھینچے جائیں تو ثابت کریں کہ ان خطوں میں عمود سب سے چھوٹا ہو گا ۔

(ب) ایک نہر کے دونوں کنارے آپس میں متوازی ہیں ۔ نہر کے کنارے پر نقطہ ا لیا گیا۔ نہر کے دوسرے کنارے پر نقاط ب اور ج اس طرح لئے گئے ہیں ۔ کہ خطوط ب ا اور ج ا نہر کے پہلے

کنارے کے ساتھ °45 کے زاویے بناتے ھیں ۔ اگر ب ج کا درمیانی فاصلہ 100 فٹ ھو تو لہر کی چوڑائی معلوم کریں ۔

6 (ا) ثابت کیجئے کہ مثلث کے زاویوں کے ناصف ھم نقطہ ھوتے ھیں ۔

(ب) ایک مثلث کے زاویوں کے ناصف نقطہ م پر ملتے ھیں ۔ ثابت کیجئے کہ م مثلث کے اندرونی دائرہ (جو دائرہ مثلث کے اندر ھو اور اس کے ضلعوں کو مس کرے) کا مرکز ھے اور اس کا نصف قطر اس عمود کے برابر ھے جو مثلث کے کسی ضلع پر نقطہ م سے کھینچا جائے ۔

7 (ا) ثابت کیجئے کہ قائم الزاویہ مثلث میں وتر کا مربع باقی دو اضلاع کے مربعوں کے مجموعے کے برابر ھو گا ۔

(ب) ایک مثلث ا ب ج میں ا ب = ا ج ۔ اگر ج سے مقابل کے ضلع ا ب پر عمود گرایا جائے ۔ جو ضلع ا ب کو نقطہ د پر قطع کرے تو ثابت کیجئے کہ $(ب ج)^2 = 2(ا ب) \times (د ب)$

8 (ا) اگر ایک خط مستقیم دائرہ کے مرکز سے گذرتا ھوا قطر کے علاوہ کسی اور وتر کی تنصیف کرے تو وہ خط مستقیم وتر پر عمود ھو گا ۔

(ب) ایک دائرہ میں وتر ا ب لیا گیا ھے ۔ نقط ل اس وتر کا نقطہ وسطی ھے ۔ نقطہ م دائرہ کا مرکز ھے ۔ ایک اور وتر ج د لیا گیا ۔ جو وتر ا ب کے متوازی ھے ۔ ثابت کیجئے کہ ل ۔ م کو ملانے والا خط مستقیم وتر ج د کی زاویہ قائمہ پر تنصیف کرتا ھے ۔

9 (ا) ایک خط مستقیم دائرہ کو مس کرے اور نقطہ مماس سے ایک وتر کھینچا جائے تو ثابت کیجئے کہ وتر اور مماس کے درمیانی زاویے متبادلہ قطعات کے زاویوں کے برابر ھوں گے ۔

(ب) ا ایک دائرہ کا وتر ھے ۔ اور نقطہ ف دائرہ کے محیط پر لیا گیا ھے ۔ اگر زاویہ ا ف ب = °60 ھو ۔ تو ثابت کیجئے کہ وتر ا ب اور نقاط ا ب پر کے دائرہ کے مماس ایک متوازی الاضلاع مثلث بنائیں گے ۔

10 (ا) اگر ایک خط مستقیم مثلث کے دو ضلعوں کو ایک ھی نسبت میں قطع کرے تو ثابت کیجئے کہ وہ خط مستقیم مثلث کے تیسرے ضلعے کے متوازی ھو گا ۔

(ب) ب ل ، ن اضلاع کے وسطی نقاط ھیں ۔
ثابت کے مساوی الزاویہ ھے

1962 (گروپ ب)

1 ایک تکون ا ب ج بنائیے جس میں ب ج = 6·5 سم ج ا + ا ب = 10 سم اور زاویہ ا ب ج = 60°

ایک مربع بنائیے جس کا رقبہ اس تکون کے رقبے کے برابر ہو۔

یا

ایک چوکور ا ب ج د بنائیے جس میں ا ب = ب ج = 5·5 سم، ج د = د ا = 4·5 سم اور زاویہ ا = 75°
ایک ایسی تکون بنائیے جو رقبہ میں اس چوکور کے برابر ہو۔

2 (ا) ایک معین بنائیے جس کا ایک وتر ″2 اور ہر ضلع ″2 ہو۔ ایک دائرہ کھینچیے جو اس کے اضلاع کو اندرونی طور پر مس کرے۔

(ب) 3 انچ نصف قطر کا دائرہ کے باہر منتظم مسدس بنائیے۔

(ج) ہندسی طریق سے $\frac{3\cdot5 \times 2\cdot4}{2\cdot8}$ کی قیمت معلوم کیجئے۔

(د) دو ایسے دائرے کھینچیے جس کے نصف قطر ″1·2 اور ″9 ہیں۔ اور جن کے مرکروں میں ″1·7 کا فاصلہ ہے۔ ان کے سیدھے مشترک مماس کھینچیے۔

(ہ) 2 سم نصف قطر کا ایک دائرہ کھینچیے جو دو ایسے خطوط کو مس کرے جن کا درمیانی زاویہ 60° ہو۔

3 (ا) اگر ایک تکون کے تین ضلعے دوسری تکون کے تین ضلعوں کے الگ الگ مساوی ہوں۔ تو ثابت کیجئے۔ کہ دونوں تکونیں منطبق ہیں۔

(ب) ثابت کیجئے۔ اگر ایک ہی قاعدہ پر دو مساوی الساقین تکونیں بنائی جائیں۔ تو ان کے راسوں کو ملانے والا خط قاعدہ کا عمودی ناصف ہو گا۔

4 (ا) اگر تین یا تین سے زیادہ متوازی خطوط کسی ایک خط قاطع پر مساوی حصے کاٹیں تو ثابت کیجئے کہ وہ ہر خط قاطع پر مساوی حصے کاٹیں گے۔

(ب) ثابت کیجئے کہ اگر تکون کے ایک ضلع کے نقطہ تنصیف میں سے ایک خط قاعدہ کے مساوی کھینچا جائے تو وہ خط تیسرے ضلع کی تنصیف کرتا ہے اور قاعدہ کا نصف ہو گا۔

5 (ا) ثابت کیجئے کہ دو مضیہ خطوط متقاطع سے یکساں فاصلے پر رہ کر حرکت کرنے والے نقطے کا طرق انعقاط ان کے درمیانی زاویوں کے ناصفوں کی جوڑی پر مشتمل ہو گا۔

(ب) ثابت کیجئے۔ کہ تکون کے دو بیرونی زاویوں کے ناصف اور تیسرے زاویے کا اندرونی ناصف ایک ہی نقطہ میں سے گزرتے ہیں۔

6 (ا) دو مساوی الرقبہ تکونوں کے قاعدے اگر مساوی ہوں تو ان کے ارتفاع بھی مساوی ہوتے ہیں۔

(ب) دو متساوی الرقبہ تکونیں ایک قاعدہ کے مخالف سمتوں میں واقع ہیں۔ ثابت کیجئے کہ قاعدہ راس کو ملانے والے خط کی تنصیف کرتا ہے۔

7 (ا) مثلث ا ب ج میں ا د وسطانیہ ہے - ثابت کیجئے کہ
اب^2+ا $\text{ج}^2=2$ ب د^2+2 ب د^2+2 ا د^2۔

(ب) ثابت کیجئے کہ کسی مثلث کے تینوں وسطانیوں پر کے مربعوں کے مجموعے کا چار گنا اس کے اضلاع پر کے مربعوں کے مجموعے کے تین گنے کے برابر ہوتا ہے۔

8 (ا) ثابت کیجئے کہ دائرہ کے مرکز سے اس کے وتر پر کھینچا ہوا عمود وتر کی تنصیف کرتا ہے۔ بغیر ثبوت کے اس مسئلہ کا عکس بھی بیان کیجئے۔

(ب) اگر دو دائرے ایک دوسرے کو کاٹیں تو ثابت کیجئے۔ کہ مرکزوں کو ملانے والا خط دائروں کے مشترکہ وتر کا عمودی ناصف ہو گا۔

9 (ا) ثابت کیجئے کہ دائرہ کی کسی قوس کا مرکز زاویہ اس قوس کے محیطی زاویہ سے دو چند ہوتا ہے۔

(ب) ا ب اور ج د ایک دائرہ کے دو متوازی وتر ہیں۔ ثابت کیجئے کہ قوس ا ج مساوی قوس ب د ہے۔

10 (ا) اگر ایک خط مستقیم کسی تکون کے دو ضلعوں کو ایک ھی نسبت میں تقسیم کرے تو ثابت کیجئے کہ یہ خط تیسرے ضلعے کے متوازی ھو گا ۔

(ب) ا ب ج اور د ب ج دو تکونوں کے مشترک قاعدہ پر ایک نقطہ ل لیکر ان میں ایک خط مستقیم ل م ‖ ا ب کے کھینچا گیا ۔ جو ا ج پر ملتا ھے ۔ ایک اور خط مستقیم ل ن متوازی ب د کے کھینچا گیا ھے ۔ جو د ج کو ن پر ملتا ھے ۔ ثابت کیجئے کہ م ن ‖ ا د ھے ۔

1963 (گروپ ا)

1 (ا) ایک مثلث کے تینوں الاضلاع بالترتیب دوسری مثلث کے تینوں ضلعوں کے برابر ھیں۔ ثابت کیجئے کہ وہ مثلث متماثل ھونگے۔

(ب) دو دائرے جن کے مراکز بالترتیب A اور B ھیں ۔ نقطہ C اور D پر ایک دوسرے کو کاٹتے ھیں ۔ ثابت کیجئے AB خط CD کا عمودی ناصف ھے ۔

2 (ا) متوازی الاضلاعین جو ایک ھی قاعدہ یا مساوی قاعدوں پر واقع ھوں ۔ اور جن کے ارتفاع مساوی ھوں رقبہ میں برابر ھوتی ھیں ۔

(ب) ایک متوازی الاضلاع بنائیے جسکے متصلہ ضلعے 3 سم اور 4 سم اور درمیانی زاویہ 60° ھو ۔ اس متوازی الاضلاع کو مساوی الرقبہ مربع میں تحویل کیجئے تیز مربع کا ضلع ناپئے ۔

3 (ا) ثابت کیجئے کہ مثلث کے وسطانیے مراکز ھوتے ھیں ۔

(ب) اگر کسی مثلث کے دو وسطانیے برابر ھوں ۔ ثابت کیجئے کہ وہ مثلث مساوی الساقین ھے ۔

4 (ا) اگر کسی چوکور کے دو متقابلہ زاویوں کا مجموعہ دو قائمے ھو تو اس کے نقاط راس متدائر ھوں گے ۔

(ب) اگر کسی ذوزنقہ کے غیر متوزی ضلعے مساوی ھوں تو ثابت کیجئے کہ وہ ذوزنقہ متدائر ھو گی ۔

5 (ا) اگر دو دائرے ایک دوسرے کو خارجی یا داخلی طور پر مس کریں تو ثابت کریں ۔ کہ خط مراکز نقطہ مماس میں سے گزرے گا ۔

(ب) تین دائرے کھینچیے جن کا نصف قطر 2.3 سم ، 1.9 سم اور 3 سم ہیں ۔ اور ان میں سے ہر دائرہ باقی دو خارجی طور پر مس کرے ۔

6 (ا) اگر کسی دائرے کے دو وتر ایک دوسرے کو دائرہ کے اندر قطع کریں ۔ کہ ایک خط کے حصوں کا مستطیل دوسرے خط کے حصوں کے مستطیل کے برابر ہو گا ۔

(ب) اگر دو خطوط ایک دوسرے کو اس طرح قطع کریں ۔ کہ ایک خط کے حصوں کا مستطیل دوسرے خط کے حصوں کے مستطیل کے برابر ہو تو ثابت کیجئیے ۔ کہ ان خطوں کے سرے متدائر ہوں گے ۔

7 (ا) ثابت کیجئیے کہ مثلث کے کسی داخلی زاویہ کا ناصف مقابل کے ضلع کو اسی نسبت میں تقسیم کرتا ہے ۔ جو اس کے اضلاع محیط میں ہوں ۔

(ب) 6.4 سم لمبے خط کو داخلی طور پر ہندسی طریق سے 5 : 3 کی نسبت میں تقسیم کیجئیے ۔ اور ان دو حصوں کا وسطی التناسب ہندسی طریق سے معلوم کیجئیے ۔

1963 (گروپ ب)

1 (ا) ایک مثلث ABC بنائیے جس میں $BC = 2.9''$ اور زاویہ $B = 45°$ اور زاویہ $A = 30°$ اس کے تینوں ارتفاع کھینچیے ۔

(ب) ایک معین بنائیے ۔ جس کے وتر 8 سم اور 6 سم ہوں ۔ اس کے اضلاع کی پیمائش کیجئیے ۔

2 (ا) اگر دو خط مستقیم ایک ہی خط کے متوازی ہوں ۔ تو ثابت کیجئیے ۔ کہ وہ خطوط باہم متوازی ہوں گے ۔

(ب) اگر کسی مثلث کے دو زاویے باہم برابر ہوں تو ثابت کیجئیے ان کے مقابل کے اضلاع بھی باہم برابر ہوں گے ۔

3 (ا) مندرجہ ذیل میں سے ہر گروہ کے متعلق تحقیقات کیجئیے ۔ کہ آیا وہ کسی مثلث کے ضلعوں کی لمبائیاں ہو سکتی ہیں ۔ یا انہیں جواب مدلل دیجئیے ۔

(''5 ، ''3 ، ''2) ، (7 ، 6 ، 8) (5.6 سم 2.1 ، 4.3)

(ب) ایک مثلث متساوی الساقین کا راسی زاویہ اس کے قاعدے کے زاویے سے نصف ہے ۔ ہر ایک زاویہ کی مقدار معلوم کیجئیے ۔

1964 (گروپ ا)

1 (ا) ایک انچ نصف قطر کے دائرے کے اندر یک منتظم مسدس (چھکون) بنائیے -

(ب) ایک چوکور ABCD بنائیے جس میں $AB = 1\cdot6''$ ، $BC = 1\cdot2''$ ، $CD = 2\cdot3''$ زاویہ $B = 90°$ اور زاویہ $C = 120°$ ہو-

2 (ا) $3\cdot4''$ لمبے خط مستقیم کو $2 : 3$: کی نسبت میں تقسیم کیجئے -

(ب) ایک تکون بنائیے جس میں $AB = 1\cdot2''$ ، $BC = 1\cdot5''$ اور زاویہ $B = 120°$ اس کے گوشوں سے گزرتا ہوا ایک دائرہ کھینچئے-

1964 (گروپ ب)

1 (ا) اگر دو قائم الزاویہ تکونوں کے وتر برابر ہوں اور پہلی کا ایک ضلع دوسری کے ایک ضلع کے برابر ہو- تو ثابت کیجئے کہ تکونیں منطبق ہوں گی-

(ب) کسی مثلث میں قاعدے کے سروں سے متقابلہ ضلعوں پر گرائے ہو عمود برابر ہیں- ثابت کیجئے کہ مثلث متساوی الساقین ہے-

2 (ا) مثلث ABC بنائیے جب کہ $AB = 7\cdot5$ cm. اور $BC = 6$ cm اور $\angle B$ $90°$ ہو - مثلث کو ہم رقبہ مربع میں تبدیل کیجئے اور مربع کا ضلع ناپئے -

(ب) ہندسی طریق سے $\sqrt{1.}$ اور $\dfrac{4\cdot7}{2\cdot4 \times 1\cdot5}$ کی قیمت معلوم کیجئے-

3 (ا) ثابت کیجئے کہ کسی منفرجہ- الزاویہ مثلث میں منفرجہ زاویہ (قائمہ سے بڑا) کے متقابلہ ضلع کے مربع برابر ہوتا ہے - باقی دو چند ضلعوں کے مربعوں کے مجموعہ کے مع دو چند اس مستطیل کے جو باقی دو ضلعوں میں سے ایک ضلع اور اس پر دوسرے ضلع کا ظل مل کر بناتے ہیں-

(ب) ABC ایک مثلث ہے جس کا $\angle B$ منفرجہ ہے- CX اور AY ترتیب وار بڑھائے ہوئے ضلع AB اور ضلع BC پر عمود گرائے گئے ہیں - ثابت کیجئے $AB \cdot BX = CB \cdot BY$

4 (ا) ثابت کیجئے کہ اُس نقطے کا طریق جو دو قائم نقطوں سے مساوی الفاصلہ ہو- اس خط کا عمودی ناصف ہوتا ہے- جو ان قائم نقطوں کو ملاتا ہے -

(ب) ثابت کیجئے کہ مثلث کے اضلاع کے عمودی ناصف مرا کز (ہم نقطہ) ہوتے ہیں ۔

5 (ا) اگر مساوی دائروں میں دو قوسین مساوی ہوں تو ثابت کیجئے کہ ان قوسوں کے وتر بھی مساوی ہوں گے ۔ نیز مسئلہ کے عکس کو بیان کیجئے اور ثابت کیجئے ۔

(ب) اگر کسی متدائر چوکور کے وتر باہم برابر ہوں ۔ تو ثابت کیجئے کہ چوکور کے متقابلہ ضلعوں کا ایک جوڑا متوازی ہو گا ۔ اور دوسرا جوڑا برابر ہو گا ۔

6 (ا) اگر کوئی خط مستقیم دائرہ کو مس کرے اور نقطۂ تماس (Point of Contact) سے ایک وتر کھینچا جائے ۔ تو ثابت کیجئے کہ وتر اور مماس کے درمیان زاویے متبادلہ قطعات (Alternate Segments) کے زاویوں کے برابر ہوں گے ۔

(ب) نقطہ P ایک ایسے دائرے کے محیط پر لیجئے جس کا نصف قطر 1·4 انچ اور مرکز A ہو ۔ اسی طرح نقطہ Q ایک دوسرے دائرہ کے محیط پر لیجئے جس کا نصف قطر 1·2 انچ اور مرکز B ہو ۔ نقطہ P پر پہلے دائرہ کا مماس کھینچیے ۔ جب کہ مرکز A کو استعمال میں لایا جا سکتا ہو اور نقطہ Q سے دوسرے دائرہ کا مماس کھینچئے ۔ جب کہ مرکز B کو مماس کی بناوٹ میں استعمال نہ کیا جاتا ہو ۔

7 (ا) اگر دو تکونیں مساوی الزاویا (Equiangular) ہوں ۔ تو ثابت کیجئے کہ ان کے متناظرہ ضلعے متناسب ہوں گے ۔ نیز اس مسئلہ کے عکس کو بیان کیجئے ۔

(ب) ABC ایک قائم الزاویہ تکون ہے ۔ جس کا زاویہ A قائمہ ہے ۔ AL ضلع BC پر عمود کھینچا گیا ہے ۔ ثابت کیجئے کہ ایسا کرنے سے جو دو تکونیں بنتی ہیں وہ آپس میں مساوی الزاویہ ہوں گی ۔ نیز ثابت کیجئے کہ $AL^2 = BL \cdot CL$ ۔

1965

1 (ا) اگر ایک مثلث کے تینوں ضلعے بالترتیب دوسرے مثلث کے تینوں ضلعوں کے برابر ہوں ۔ تو ثابت کیجئے کہ مثلث متماثل ہوں گے ۔

(ب) ایک ہی قاعدے پر اور اس کے مخالف جانب دو متساوی الساقین مثلث واقع ہیں ۔ ثابت کیجئے کہ ان کے راسوں کو ملانے والا خط قاعدے کی عموداً تنصیف کرے گا ۔

2 (ا) ثابت کیجئے کہ متوازی الاضلاع کے مقابل کے ضلعے اور زاویے باہم برابر ہوتے ہیں - اور وتر ایک دوسرے کی تنصیف کرتے ہیں -

(ب) ایک متوازی الاضلاع بنائیے- جس کے وتر 8 س-م اور 6 س-م ہوں - اور وتروں کے درمیان °60 کا زاویہ ہو - متوازی الاضلاع کو ہم رقبہ مستطیل میں تحویل کیجئے -

3 (ا) اگر تین یا تین سے زیادہ متوازی خطوط مستقیم کسی خط قاطع (Transversal) پر مساوی ٹکڑے قطع کریں - تو ثابت کیجئے کہ ہر خط قاطع پر اسی نظیر کے مساوی ٹکڑے قطع کریں گے -

(ب) ثابت کیجئے کہ اگر کسی مثلث کے ایک ضلع کے وسطی نقطہ سے دوسرے ضلع کے متوازی کوئی خط مستقیم کھینچا جاوے تو وہ تیسرے ضلع کی تنصیف کرے گا -

4 (ا) ثابت کیجئے کہ اگر کسی دائرے کے مرکز سے کوئی خط دائرہ کے کسی وتر کی تنصیف کرتا ہوا کھینچا جاوے - تو وہ خط وتر پر عمود ہو گا - اور اگر دائرے کے مرکز سے کوئی خط دائرہ کے کسی وتر پر عمود کھینچا جاوے - تو وہ خط وتر کی تنصیف کرے گا - شرط وتر قطر نہیں ہے -

(ب) دو ہم مرکز دائروں کا مشترک مرکز O ہے - ABCD ایک خط بیرونی دائرہ کو A اور D پر قطع کرتا ہے- اور اندرونی دائرہ کو نقاط B اور C پر - ثابت کیجئے کہ AB = CD

5 (ا) اگر دو دائرے ایک دوسرے کو خارجی طور پر یا داخلی طور پر مس کریں - تو ثابت کیجئے کہ خط مراکز نقطہ تماس (Point of Contact) سے گذرے گا -

(ب) تین دائرے کھینچئے جن کے نصف قطر ″1·2 ، ″1·4 اور ″1·6 ہوں - اور ان میں سے ہر ایک باقی دو دائروں کو بیرونی طور پر مس کرے -

6 (ا) ثابت کیجئے کہ مثلث کے کسی زاویہ کا داخلی ناصف مقابل کے ضلع کو داخلی طور پر اسی نسبت میں تقسیم کرتا ہے - جو نسبت کہ اس زاویے کے گرد کے (sides containing the angle) اضلاع میں ہوتی ہے -

(ب) ایک خط 5·4 س-م لے کر خط کو داخلی طور پر ہندسی طریق سے 3 : 5 کی نسبت میں تقسیم کیجئے - اور اس طرح خط کے جو دو حصے بنتے ہیں - ان کا وسط فی التناسب ہندسی طریق سے معلوم کیجیے -